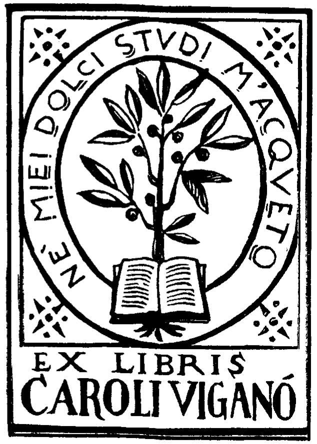


GREGORII FONTANAE

CLER. REG. SCHOL. PIAR.

IN REG. CAES. PAPIENSI UNIVERSITATE

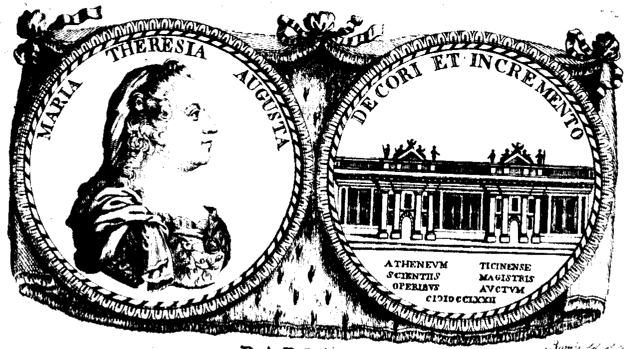
SUBLIMIORIS MATHESEOS PUBLICI PROFESSORIS

DISQUISITIONES

PHYSICO-MATHEMATICAE,

NUNC PRIMUM EDITAE.

Meo ſum pauper in aere. *Hor.* Lib. II. Ep. II.

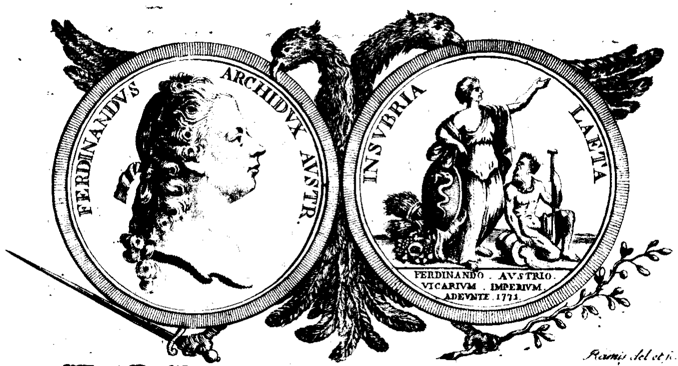


PAPIAE.

IN TYPOGRAPHEO MONAST. S. SALVATORIS.

PRAESID. REI LITTER. PERMITT.

ANNO MDCCLXXX.



Ramis del. et sc.

FERDINANDO
HUNGARIAE ET BOHEMIAE PRINCIPI
AUSTRIAE ARCHIDUCI
INSUBRIAE AUSTRIACAE GUBERNATORI
ETC. ETC. ETC.

GREGORIUS FONTANA
FELICITATEM.

Ucubrationum Mearum, quas Tibi, Ferdinande Austriace,

a

nuncupo & voveo, non tam Te patronum ac vindicem opto, quam aeſtimatorem ac judicem vereor. Tuum ſcilicet iſtud ingenium peracre, acutiſſimum, ad omnia ſumma natura factum, incredibili celeritate praeter alia quamplurima Phyſicas etiam arripuit Mathematicaſque Diſciplinas, & pro indolis magnitudine vulgaria quaeque & in medio poſita deſpicientis in ſecretiora illarum adyta penetravit. Hinc

Tuus ille exſtitit ab incorrupto judicio nunquam diſjunctus amor, quo honeſtas Artes ac Litteras ita complecteris, ut quantum iis, qui vere modeſteque ſapiunt, ultro lubenſque tribuis, tantum abhorreas a fucata iſta, grandiloqua & circulatoria philoſophia, quae aetatem noſtram bonorum aeque ac malorum feraciſſimam occupavit: ea enim eſt fere humanarum rerum conditio, ut quo tempore Scien-

tiarum studia ardentissime excoluntur, & a summo perfectionis fastigio videntur jam propius abesse, tunc praecipue inter paucos vere solideque sapientes multae undique quasi turmatim e-mergant cohortes ardelionum, qui magnis verbis ac mirificis promissis populo se venditantes viis omnibus ad famam grassantur. Tu autem, PRINCEPS SAPIENTISSIME, cum ab his Tibi imponi non sinis, tum illos Tua quotidie confirmas benevolentia, auctoritate tueris, ornas beneficiis, nihil ut sibi de Te polliceri non debeant Philosophi sancto hoc nomine digni, omnesque vel Tuo unius exemplo intelligere possint, quantum a Viris ipsis Principibus & populorum rectoribus sincerae Virtuti ingenuisque Artibus sit tribuendum, quae sane si magnis careant patrociniis, vel humiles concidant, vel debelitatae languescant, neceſſe eſt. Atque hunc Tuum effuſum in Litteras favorem ſenſit prae ceteris hoc noſtrum Papienſe Archigymnaſium, quod Tuis auſpiciis paucorum annorum intervallo ad eam crevit amplitudinem gloriae, ut jam audacter poſſit cum Italicorum, atque adeo Europaeorum florentiſſimo quoque de principatu contendere. Quum enim his proximis annis lauta in primis ſupellectile, pulcherrimiſque rebus auctum

fuerit, iiſque non ad ſpeciem & fucum, ſed ad veritatem utilitatemque compoſitis, Horto nempe Botanico, Theatris tribus Chemico, Anatomico, Chirurgico, Muſeis duobus altero Hiſtoriae Naturalis, Experimentalis Phyſicae altero, gemina Schola, Clinica nimirum, & Obſtetricia demum Bibliotheca; ne quid poſtremo tantorum operum abſolutioni ac perennitati deeſſet, hoc ipſo anno inſo-

litum illi decus & praesidium comparasti nova repente excitata eaque illustri & splendida Typographia. *Quae omnia tam brevi inchoata & perfecta dum nostrates & exteri novarum rerum fama huc confluentes attente circumspiciunt, tacito quodam sensu admonentur, non potuisse aliunde res tantas, tamque profusos & plusquam Regios sumptus quam ab* Austriaca *Liberalitate & magnificentia proficisci. Harum Tu haeres virtutum, & Majorum Tuorum gloriae ac praesertim* Maternae *custos & aemulator, isto flore aetatis, ista vividae indolis laetitia, acerrimo isto rerum omnium sensu admirabilique solertia illud jam es assequutus, ut in magnis quibusque inceptis omnes a Te omen capere possint. Quae cum ita sint, haud gravate feres,* Ferdinande Clementissime, *privatum hominem nihilque sibi tribuen-*

tem tanti P*RINCIPIS* *patrocinium ad leves haſce litterulas poſtulare. Sic autem habeto, me mortalium beatiſſimum futurum, ſi infirmos hoſce ſomniculoſi ac timidioris ingenii conatus, publicae lucis diſcrimen magnopere formidantes auſpiciorum Tuorum felicitate fortunaveris. Vale Tibi, populiſque.*

Dabam Papiae ex Regia Univerſitatis Bibliotheca Id. Sept. Ann. MDCCLXXX.

MONITUM.

AD deſignandas poteſtates 2:^{am}, 3:^{am} &c. ſinuum & coſinuum arcus cujuslibet φ uſurpavi promiſcue tum *ſin.*$^2\,\varphi$, *ſin.*$^3\,\varphi$, *cos.*$^2\,\varphi$, *cos.*$^3\,\varphi$ frequentius, tum *ſin.* φ^2, *ſin.* φ^3, *cos.* φ^2,

$cos. \varphi^3$ parcius. Praeterea ubicumque occurrit quantitas *ſin.* $2\psi^2$, *ſin.* $2\psi^3$, *cos.* $2\psi^2$, *cos.* $2\psi^3$, intelligi volo poteſtatem ſecundam & tertiam ejus ſinus vel coſinus, qui ad arcum aut angulum 2ψ refertur.

Id monendum duxi, ne ſpecierum inconſtantia, quae mihi ad res quam ad ſigna attentiori obrepſit & impoſuit, perturbationem pareret, & perſpicuitati officiens legentes remoraretur.

Quod ad typorum correctionem attinet, curam hanc moleſtiſſimam mihique fere intolerabilem pro ſua in

me obſervantia voluit alacriter ac ſtrenue ſuſcipere diſcipulus mei amantiſſimus Ferdinandus Meſſia Neapolitanus, ex Olivetana Familia, ſingulari fide homo, ingeniique acumine & judicii vi ſupra aetatem praecellens. Is in ſe recipit depoſito prope pignore, erratum vel omnino nullum, vel certe nullius momenti irrepſiſſe; quod in hujuſmodi libris optare quidem, ſperare vix poſſumus.

Ceterum ſi inter legendum animadvertes, me a Geometrarum maximis alicubi diſſentire, naevumque unum aut alterum in immortalibus illorum Operibus notare, cave putes, voluiſſe me Viris doctiſſimis & famae ſecuris, a quibus longiſſime abſum, dicam impingere. Sancte enim affirmo, ſine eorum laboribus & vigiliis, unde & haec noſtra manarunt, pagellas haſce nunquam lucem fuiſſe aſpecturas. Quod eo dico, ut omnes intelligant, grata beneficii recordatione nihil mihi eſſe antiquius: *eſt enim benignum*, ut dictum a PLINIO (*a*), *& plenum ingenui pudoris fateri per quos profeceris*. Si quid porro peccatum a nobis fuerit (pluries autem fuiſſe in re difficili, valde ſuſ-

(*a*) In Praef. Hiſt. Nat.

picamur), quo minus eadem lege; id eſt ſine acerbitate & contumelia in nos agatur, non recuſamus; quod ſi non modo ſine convicio, ſed humaniter quoque & amice moneamur, gratias etiam habebimus. Sit iſta, dicam cum TULLIO, in Graecorum levitate perverſitas, qui maledictis inſectantur eos, a quibus de veritate diſſentiunt: nos quidem & refellere ſine pertinacia, & refelli ſine iracundia parati ſumus.

Unum addo, formularum uſum ſelecto aliquo exemplo fuiſſe a me paſſim data opera illuſtratum: expertus enim didici, in quaeſtionibus phyſico-mathematicis paullo abſtruſioribus tironibus etiam acutioribus, niſi alias fuerint diuturna exercitatione ſubacti, aquam haerere, ubi ab univerſa rei forma ad peculiare & abſolutum aliquid provocantur.

INDEX
DISQUISITIONUM.

DISQUISITIO I.

DISQUISITIO II.

DISQUISITIO III.

DISQUISITIO XII.

DISQUISITIO XIII.

DISQUISITIO XIV.

DISQUISITIO XV.

Plato in Philebo

Πασῶν που τεχνῶν ἂν τις ἀριθμητικὴν χωρίζῃ, καὶ μετρητικὴν, καὶ στατικὴν, ὡς ἔπος ἐιπεῖν, φαῦλον τὸ καταλειπόμενον ἑκαστης ἂν γίγνοιτο.

Si quis ab omnibus Artibus ſegregaret *numerandi*, *dimetiendique*, & *ponderandi* peritiam, vile quiddam eſſet quod uniuſcujuſque reſtaret.

Ex verſ. Marsilii Ficini.

DISQUISITIO I.

De Caloris Diurni Solaris In Variis Terrae Locis Aestimatione Et Comparatione.

1. Profundi vir ingenii ſubactique judicii Edmundus Hallejus, quo nemo propius inter Britannos Philoſophos ad Magni Newtoni gloriam acceſſiſſe videtur, anno 1693. omnium primus ſubtiliſſimam ſuſcepit inveſtigationem *de caloris ſolaris magnitudine in omnibus latitudinibus terreſtribus proportionali*, & Tranſactionum Philoſophicarum num. 203. elegantem protulit ſyntheticam Problematis ſpecioſi ac difficilis conſtructionem (*a*). Poſt Halleji fata Geometra nobilis Thomas Simpsonius in eximio Opere *De Fluxionum Doctrina* Problema retractavit analytice, formulamque exhibuit ſimpliciſſimam ex-

(a) Phil. Trans. num. 203. *The proportional Heat of the Sun in all Latitudes*.

primentem Solaris aestus vim in variis Terrae locis pro dato quolibet anni die, vel parte diei (*b*). Sed cum in eo esset SIMPSONIUS, ut fluxionionalis formulae momentaneum calorem exhibentis fluentem magnitudinem definiret, omissa constanti, quae non erat prorsus negligenda, humani aliquid passus est. Statui itaque, Problema iterum via analytica aggredi, Tabulamque praeterea supputare, quae rationem exhibeat inter calorem diurnum utrumque sub Æquatore, & Polo pro declinationibus singulis solaribus ab 1° usque ad 23.° 28'.

2. Jam primum omnium satis constat, intendi calorem Solis crescente ipsius supra horizontem altitudine; & in ea sane ratione intendi, qua augetur sinus altitudinis illius: neque enim audiendus est vir caetera doctus Fatio de DUILLIER, qui in Tractatu *De Murorum ad fovendas Arbores fructiferas inclinatione* (*c*), simplici rationi sinus elevationis Solaris rationem duplicatam substituit, contra quem egregie disputat, quaestionemque omnino dirimit vir acer & ingeniosus MAIRANUS in tertio *De generali Caloris Solaris Caussa* Commentario (*d*). Con-

(b) SIMPSON *The Doctrine and Application of Fluxions* §. 470.

(c) *Fruit Walls improved by inclining them to the Horizon* p. 39.

(d) *Mém. de l' Accad. des Sciences de Paris* ann. 1765.

stat praeterea, majorem rursus fieri instantaneum Solis calorem, quo longior est momenti, vel tempusculi infinitesimi duratio, ut nimirum augeatur in ratione directa tempusculi. Hinc vero consequens est, momentaneum Solis aestum rationem sequi compositam ex sinu altitudinis & ex tempusculo conjunctim, riteque repraesentari per factum ex sinu altitudinis in tempusculum.

3. Superesset sane in hac supputatione elementum alterum expendendum, debilitatio scilicet radiorum solarium aerem permeantium, qui eo disperguntur magis atque intercipiuntur, quo minor est Solis elevatio. Sed praeter quam quod aliqua hic habetur compensatio, quum ex majori radiorum interceptorum copia terra quidem minus, aer autem magis incalescat, adeo perplexum incertumque deprehenditur hujusmodi elementum, ut nulli certae legi aut rationi subjici queat. Liquet id ex collatione Tabularum BOUGUERIANAE, & LAMBERTIANAE (*e*) quae varios exhibent debilitationis gradus radiorum solarium varia obliquitate athmosphaeram tranantium, quarum tabularum maxima est & vix credibilis discrepantia.

(e) BOUGUER *Traité d' Optique sur la Gradation de la Lumière* Liv. III. Sect. IV.

LAMBERT *Photometria* §. 886.

4. Restat ergo, ut ardorem Solis instantaneum proportionalem statuamus facto quod oritur ex multiplicatione tempusculi per sinum altitudinis Solaris, hocque productum differentiale ad integrationem rite perducamus: ita enim formulam nanciscemur, quae Solis calorem repraesentabit intervallo quolibet diei perdurantem, indeque licebit comparationem Caloris diurni Æquatorii & Polaris perspicue deducere.

Fig. 1. 5. Sit itaque in triangulo sphaerico SPZ S Sol, P Polus, Z Zenit, itaut latus PZ sit complementum latitudinis, latus PS complementum declinationis, latus ZS complementum elevationis Solis supra horizontem, vocataque loci latitudine λ, solis declinatione δ, & elevatione ε orietur

$$\begin{aligned} \text{sin. PZ} &= \text{cos. lat.} = \text{cos. } \lambda \\ \text{sin. PS} &= \text{cos. decl.} = \text{cos. } \delta \\ \text{cos. PZ} &= \text{sin. lat.} = \text{sin. } \lambda \\ \text{cos. PS} &= \text{sin. decl.} = \text{sin. } \delta \\ \text{cos. ZS} &= \text{sin. elev.} = \text{sin. } \varepsilon \end{aligned}$$

Jam vero notum est ex Sphaericorum Doctrina, in triangulo quolibet SPZ sequentem se prodere aequalitatem cos. ZS = sin. PZ sin. PS cos. P + cos. PZ cos. PS, hoc est, facto angulo horario P, vel SPZ = z,

$$\text{sin. } \varepsilon = \text{cos. } \lambda \text{ cos. } \delta \text{ cos. } z + \text{sin. } \lambda \text{ sin. } \delta$$

6. Hoc posito quum calor Solis instantaneus sit uti factum ex sinu elevationis in tempusculum, ducto sin. ε in elementum anguli horarii prodibit differentialis formula $-$ dz sin. ε, hoc est $-$ dz cos. z cos. λ cos. δ $-$ dz sin. λ sin. δ, in qua differentiale dz sumitur negative, quod crescente Solis altitudine decrescit horarius angulus. Hujus porro formulae integrale facile invenitur $= -$ cos. λ cos. δ sin. z $-$ z sin. λ sin. δ + const.; talis igitur erit expressio caloris perseverantis ab ortu Solis usque ad elevationem ε. Quum autem in ipso ortus momento calor sit nullus, tuncque horarius angulus z abeat in arcum datum semidiurnum quem nominabimus h, fit iccirco const. = cos. λ cos. δ sin. h + h sin. λ sin. δ. Quapropter Solis calor ab ortu usque ad elevationem ε repraesentatur eleganti formula

$$(\text{sin. h} - \text{sin. z}) \text{ cos. } \lambda \text{ cos. } \delta + (\text{h} - \text{z}) \text{ sin. } \lambda \text{ sin. } \delta.$$

7. Si in hac formula accipitur horarius angulus z = o, quod fit ubi Sol loci meridianum attingit, ea convertitur in alteram simpliciorem sin. h cos. λ cos. δ + h sin. λ sin. δ exprimentem Solaris aestus quantitatem intervallo dimidiae diei aggregatam & collectam. Et quoniam mutata Solis declinatione e boreali in australem sin. δ negativus evadit, hinc est, ut Solis calor intervallo integrae diei perseverans

generalius, commodiusque exprimi queat per formulam 2 sin. h cos. λ cos. $\delta \pm 2\, h$ sin. λ sin. δ.

8. Ex hisce porro consequitur, diurnum Solis calorem in loco quovis terrestri pro data qualibet Solis declinatione facillime comparari posse cum calore diurno loci alius cujuscumque pro data alia quavis declinatione, ita ut, si h', λ', δ' designent angulum alium horarium, aliamque latitudinem, & declinationem, calor primus se habeat ad alterum quemadmodum 2 sin. h cos. λ cos. $\delta \pm 2\, h$ sin. λ sin. δ se habet ad 2 sin. h' cos. λ' cos. $\delta' \pm 2\, h'$ sin. λ' sin. δ'. Igitur dictis C, C' diurnis caloribus haec semper stabit analogia $C : C' : :$ sin. h cos. λ cos. $\delta \pm h$ sin. λ sin. δ : sin. h' cos. λ' cos. $\delta' \pm h'$ sin. λ' sin. δ', in qua binorum signorum $\pm$ affirmativum usurpatur, si declinatio sit ejusdem nominis cum latitudine, borealis cum boreali, australis cum australi; & negativum accipitur, si contraria.

9. Quum autem pro variis Solis declinationibus variet ipsius a Tellure distantia, hujusque distantiae quadratis reciproce respondeat Solaris caloris proportio, quemadmodum Physicis perspectum est; iccirco assumptis D, D' pro distantiis Solis a Terra, accuratiorem nanciscimur analogiam

$$C : C' : : \frac{\text{sin. } h \text{ cos. } \lambda \text{ cos. } \delta \pm h \text{ sin. } \lambda \text{ sin. } \delta}{D^2} : \frac{\text{sin. } h' \text{ cos. } \lambda' \text{ cos. } \delta' \pm h' \text{ sin. } \lambda' \text{ sin. } \delta'}{D'^2},$$

quae caloris Solaris diurni comparationem in binis locis quibuscumque dato quolibet anni die patefaciet.

10. Quaeratur ex. gr. proportio caloris Solaris die solstitiali aestivo in Urbibus PETROPOLI, & TICINO. Ante omnia inveniendus est arcus semidiurnus h, h' datae loci latitudini, dataeque Solis declinationi respondens. Ad hoc assequendum, ex formula §. 5. elicio $\text{cos. } z = \frac{\text{sin. } \varepsilon}{\text{cos. } \lambda \text{ cos. } \delta} - \frac{\text{sin. } \lambda \text{ sin. } \delta}{\text{cos. } \lambda \text{ cos. } \delta} = \frac{\text{sin. } \varepsilon}{\text{cos. } \lambda \text{ cos. } \delta}$ $-$ tang. λ tang. δ: si jam nulla esset horizontalis Solis parallaxis, nullaque horizontalis refractio, posita centri Solaris altitudine $\varepsilon = 0$, prodiret $z = h$, & cos. $h = -$ tang. λ tang. δ. Verum quoniam horizontalis parallaxis centrum Solis deprimit minutis secundis circiter $8\frac{1}{2}$, & refractio illud attollit minutis primis 33, eapropter neglecta parallaxi, quae prae refractione contemni tuto potest, factaque altitudine $\varepsilon = -33'$, orietur arcus semidiurni $\text{cos. } h = -\frac{\text{sin. } 33'}{\text{cos. } \lambda \text{ cos. } \delta}$ $-$ tang. λ tang. δ. Est igitur TICINI

λ . . . . $45^\circ\ 11'$

δ	23.° 28'
log. fin. 33'	7, 9822334
log. cos. λ	9, 8480909
log. cos. δ	9, 9625076
log. cos. λ cos. δ	9, 8105985
log. $\frac{\text{fin. } 33'}{\cos.\lambda \cos.\delta}$	8, 1716349
$-\frac{\text{fin. } 33'}{\cos.\lambda \cos.\delta}$	$-$0, 014847
log. tang. λ	10, 0027793
log. tang. δ	9, 6376106
log. tang. λ tang. δ	9, 6403899
$-$ tang. λ tang. δ	$-$0, 43691

Quamobrem fit cos. h = $-$ 0, 014847 $-$ 0, 43691 = $-$ 0, 451757, ac denique h = 116.° 51'.

Petropoli vero quum fit λ' = 59.° 56', invenitur

log. fin. 33'	7, 9822334
log. cos. λ'	9, 6998441
log. cos. δ	9, 9625076
log. cos. λ' cos. δ	9, 6623517

log. $\frac{\text{fin. } 33'}{\cos.\lambda' \cos.\delta}$	8, 3198817
$-\frac{\text{fin. } 33'}{\cos.\lambda' \cos.\delta}$	$-$0, 020887
log. tang. λ'	10, 2373944
log. tang. δ	9, 6376106
log. tang. λ' tang. δ	9, 8750050
$-$ tang. λ' tang. δ	$-$0, 74990

Quare cos. h' = $-$0, 020887 $-$ 0, 7499 = $-$0, 770787, & confequenter h' = 140.° 25'.

Quum vero affumpto circuli radio = 1, femiperipheria fit 3, 14159, convertitur arcus femidiurnus h in partes radii ope analogiae 180.° : 116.° 51' : : 10800' : 7011' : : 3, 14159 : h = 2, 0394; ficque per alteram analogiam 180.° : 140.° 25' : : 10800' : 8425' : : 3, 14159 : h' = 2, 4507. Inventis porro arcubus femidiurnis h, h', quoniam in hac hypothefi eft D = D', & $\delta = \delta'$, oritur ideo C : C' : : fin. h cos. λ cos. δ + h fin. λ fin. δ : fin. h' cos. λ' cos. δ + h' fin. λ' fin. δ, feu dividendo per cos. δ, fit C : C' : :
fin. h cos. λ + h fin. λ tang. δ : fin. h' cos. λ' + h' fin. λ' tang. δ

Erit itaque

log. fin. h	9, 9504583
log. cos. λ	9, 8480909

log. ſin. h cos. λ	9, 7985492
ſin. h. cos. λ	0, 62885
log. h	0, 3095024
log. ſin. λ	9, 8508702
log. tang. δ	9, 6376106
log. h ſin. λ tang. δ	9, 7979832
h ſin. λ tang. δ	0, 62803
ſin. h cos. λ + h ſin. λ tang. δ . .	1, 25688

log. ſin. h'	9, 8042757
log. cos. λ'	9, 6998441
log. ſin. h' cos. λ'	9, 5041198
ſin. h' cos. λ'	0, 31924
log. h'	0, 3892902
log. ſin. λ'	9, 9372385
log. tang. δ	9, 6376106
log. h' ſin. λ' tang. δ	9, 9641393
h' ſin. λ' tang. δ	0, 92074
ſin. h' cos. λ' + h' ſin. λ' tang. δ . . .	1, 23998

Quamobrem oritur C : C' : : 1, 25688 : 1, 23998,

hoc eſt Ticini calor diei ſolſtitialis aeſtivi ſe habet ad calorem ejuſdem diei Petropoli, quemadmodum fere 126 ad 124 : quod ſane mirum eſſe non debet, quum in hac hypotheſi ejus dumtaxat caloris habeatur ratio, qui die unico ſolſtitiali cumulatur, ſecluſo penitus calore diebus omnibus praecedentibus collecto.

11. Quaeratur ſecundo loco in eadem Urbe Ticino proportio caloris diei aeſtivi ſolſtitialis, & diei ſolſtitialis hyberni ſeu ratio C : C'. In hac hypotheſi habetur

$$C : C' : : \frac{\text{sin. h cos. } \lambda \text{ cos. } \delta + \text{h sin. } \lambda \text{ sin. } \delta}{D^2} : \frac{\text{sin. h' cos. } \lambda \text{ cos. } \delta - \text{h' sin. } \lambda \text{ sin } \delta}{D'^2},$$ videlicet

$$C : C' : : \frac{\text{sin. h} + \text{h tang. } \lambda \text{ tang. } \delta}{D^2} : \frac{\text{sin. h'} - \text{h' tang. } \lambda \text{ tang. } \delta}{D'^2}.$$

Conſtat autem ex Aſtronomicis Tabulis, logarithmum diſtantiae Solis a Terra aeſtivi ſolſtitii die, hoc eſt log. D aequari 0, 007161, & logarithmum ejus diſtantiae ſolſtitii hyemalis die, nimirum log. D' aequalem eſſe 9, 992716, aſſumpta diſtantia mediocri = 1. Hinc igitur conſequimur

ſin. h	0, 8921920
log. h	0, 3095024
log. tang. λ tang. δ	9, 6403899

$\log. h$ tang. λ tang. δ 9, 9498923

h tang. λ tang. δ 0, 8910300

fin. $h + h$ tang. λ tang. δ 1, 7832220

log. (fin. $h + h$ tang. λ tang. δ) . . 0, 2512001

log. D^2 . . . . 0, 0143220

log. $\frac{\text{fin. } h + h \text{ tang. } \lambda \text{ tang. } \delta}{D^2}$ 0, 2368781

$\frac{\text{fin. } h + h \text{ tang. } \lambda \text{ tang. } \delta}{D^2}$ 1, 7253

Poftremus analogiae terminus fupputabitur invento prius h', feu arcu femidiurno hyemalis folftitii tempore; habetur autem cos. $h' = - \frac{\text{fin. } 33'}{\text{cos. } \lambda \text{ cos. } \delta}$ + tang. λ tang. δ = − 0, 014847 + 0, 43691 = 0, 422063; atque inde $h' = 65.° 2'$, qui in partes radii converfus evadit = 1, 1350. Jam igitur nancifci licet

fin. h' 0, 9065535

log. h' 0, 0549959

log. tang. λ tang. δ 9, 6403899

log. h' tang. λ tang. δ 9, 6953858

— h' tang. λ tang. δ . . . . —0, 49589

fin. $h' - h'$ tang. λ tang. δ 0, 4106635

log. (fin. $h' - h'$ tang. λ tang. δ) . . 9, 6134860

log. D'^2 . . . . 9, 9854320

log. $\frac{\text{fin. } h' - h' \text{ tang. } \lambda \text{ tang. } \delta}{D'^2}$ 9, 6280540

$\frac{\text{fin. } h' - h' \text{ tang. } \lambda \text{ tang. } \delta}{D'^2}$ 0, 42467

Propterea fit $C : C' :: 1, 7253 : 0, 42467$, nimirum aeftivus diei folftitialis calor Ticini invenitur plus quam quadruplo major calore hyberno diei folftitialis oppofiti.

12 Reliquum eft, ut tabulam fupputemus exhibentem comparationem Caloris diurni Æquatorii, & Polaris pro fingulis Solis declinationibus ab 1° ad 23.° 28'. Ad hoc praeftandum animadverto, caloris expreffionem fin. h cos. λ cos. δ + h fin. λ fin. δ fub Æquatore mutari in fin. h cos. δ ob $\lambda = 0$, alteramque expreffionem caloris fub Polo fin. h' cos. λ' cos. δ + h' fin. λ' fin. δ abire in h' fin. δ ob $\lambda' = 90.°$. Hinc itaque fe prodit proportio $C : C' ::$ fin. h cos. δ : h' fin. δ :: fin. h : h' tang. δ. Perfpicuum porro eft, fub Polo fieri $h' = 180°$, feu in partibus radii, $h' = 3, 14159$, adeoque $C : C' ::$ fin. h : 3, 14159 tang. δ.

Invenitur autem h pro ſingulis Solis declinationibus ex formula (§ 10) $\cos. h = -\frac{\text{ſin. } 33'}{\cos.\lambda \cos.\delta} - \text{tang.}\lambda \text{ tang.}\delta$, quae ob $\lambda = 0$ degenerat in $\cos. h = -\frac{\text{ſin. } 33'}{\cos.\delta}$. Ex hiſce facile conſtruitur ſequens

TABULA COMPARATIVA

Caloris diurni Aequatorii, & Polaris
pro ſingulis Solis declinationibus.

Declinatio Solis ſeu δ	*Arcus ſemidiurnus ſub Aequatore, ſeu* h	*Calor diurnus Aequatorius ſeu* ſin. h	*Calor diurnus Polaris ſeu* 3,14159 tang. δ
1° . .	90° 33'	0,999954 . .	0,054837
2° . .	90° 33'	0,999954 . .	0,10971
3° . .	90° 33'	0,999954 . .	0,16464
4° . .	90° 33'	0,999954 . .	0,21968
5° . .	90° 33'	0,999954 . .	0,27485

Declinatio Solis ſeu δ	*Arcus ſemidiurnus ſub Aequatore, ſeu* h	*Calor diurnus Aequatorius ſeu* ſin. h	*Calor diurnus Polaris ſeu* 3,14159 tang. δ
6° . .	90° 33'	0,999954 . .	0,33020
7° . .	90° 33'	0,999954 . .	0,38574
8° . .	90° 33'	0,999954 . .	0,44152
9° . .	90° 33'	0,999954 . .	0,49758
10° . .	90° 34'	0,999951 . .	0,55395
11° . .	90° 34'	0,999951 . .	0,61067
12° . .	90° 34'	0,999951 . .	0,66777
13° . .	90° 34'	0,999951 . .	0,72530
14° . .	90° 34'	0,999951 . .	0,78329
15° . .	90° 34'	0,999951 . .	0,84179
16° . .	90° 34'	0,999951 . .	0,90084
17° . .	90° 35'	0,999948 . .	0,96048
18° . .	90° 35'	0,999948 . .	1,02077
19° . .	90° 35'	0,999948 . .	1,08174
20° . .	90° 35'	0,999948 . .	1,14345
21° . .	90° 35'	0,999948 . .	1,20594

Declinatio Solis seu δ	Arcus semidiurnus sub Aequatore, seu h	Calor diurnus Aequatorius seu sin. h	Calor diurnus Polaris seu 3,14159 tang. δ
22° . .	90°. 36ʹ	0,999945 . .	1,26929
23° . .	90°. 36ʹ	0,999945 . .	1,33353
23°. 28ʹ	90°. 36ʹ	0,999945 . .	1,36414

DISQUISITIO II.

De Calore Annuo Solari.

1. Quum in praecedenti Disquisitione Caloris *Diurni* vim ac mensuram in variis Terrae locis rite supputaverimus, ejusdemque comparationem sub Æquatore & Polo pro singulis Solis declinationibus luculenter deduxerimus, reliquum nunc est, ut *Annuum* quoque Calorem in utroque loco expendamus, ejusque intensionem accurata quoad fieri potest analysi dimetiamur.

2. Ut autem in hac paullo abstrusiori indagine ordinatim ac tuto progrediamur, necesse est in antecessum constituere, radiorum solarium numerum tempore quovis finito in Terram illabentium rationem directam sequi anguli illius, quem interea temporis Terra circa Solem describit: quod quidem elegans Theorema ita breviter demonstratur: Accipiatur in Orbita Terrestri, sive Ecliptica *APBF* arcus infini- Fig. 2. tesimus *Pp*, ductisque ab umbilico, seu centro Solis *S* radiis vectoribus *SP*, *Sp* describatur minimus circuli arcus *Pg*, qui trianguli infinitesimi *PSp* altitudinem

repraesentabit accepto latere Sp pro basi; inde vero triangulum ipsum invenitur aequale facto $\frac{1}{2} Sp . Pg$, vel $\frac{1}{2} SP . Pg$. Porro ex Kepleriana Lege areola PSp, hoc est factum $\frac{1}{2} SP . Pg$ exprimit tempus, quo Tellus minimum Eclipticae arcum Pp describit: ac praeterea perspicuum est, radiorum solarium numerum momento temporis in Terram illabentium esse ut tempusculum directe, & distantiae quadratum inverse. Igitur radiorum numerus in Terram irruentium eo tempusculo, quo Tellus movetur per minimum arcum Pp, erit uti $\frac{\frac{1}{2} SP.Pg}{SP^2}$, hoc est uti $\frac{Pg}{SP}$. Est autem circuli arcus Pg ut semidiameter SP, & angulus PSg conjunctim; consequenter numerus ille radiorum fit uti $\frac{PSg.SP}{SP}$, nimirum uti angulus PSg. Quum id singulis momentis contingat, liquet, numerum radiorum, qui tempore quolibet finito in Terram emittuntur, dum ex. gr. Tellus Eclipticae arcum AP percurrit, fore uti angulus ASP interea descriptus.

3. Hoc in antecessum posito, cogitemus nunc triangulum sphaericum rectangulum ex tribus arcubus Circulorum Sphaerae Maximorum, Eclipticae, Æquatoris, & Declinationis; cujus quidem trianguli hypothenusa est arcus Eclipticae ab initio Arietis usque

ad Solis locum, nimirum longitudo Solis, latus unum est arcus Circuli Declinationis a Solis loco usque ad Æquatorem, videlicet declinatio Solis, ac latus alterum est arcus Æquatoris ab initio Arietis usque ad Circulum Declinationis. Vocetur jam longitudo Solis v, Eclipticae obliquitas φ, & Solis declinatio δ; & quum in sphaerico quovis triangulo sinus laterum sint inter se uti sinus angulorum lateribus oppositorum, fiet icci rco

$$1 : \sin.\varphi :: \sin.v : \sin.\delta.$$

Hinc itaque colligitur $\sin.\delta = \sin.\varphi \, \sin.v$, & $\cos.\delta = \sqrt{(1 - \sin.^2\varphi \, \sin.^2 v)}$. Quum vero Calor diurnus aequatorius in superiori Disquisitione inventus fuerit $= \sin.h \cos.\delta$, & Calor diurnus Polaris $= 3,14159 \sin.\delta = \pi \sin.\delta$, sumpto π pro circuli semiperipheria; eapropter substitutis valoribus modo erutis $\sin.\delta$, & $\cos.\delta$, orietur Calor Æquatorius diurnus $= \sin.h \sqrt{(1 - \sin.^2\varphi \, \sin.^2 v)}$, & Calor diurnus Polaris $= \pi \sin.\varphi \, \sin.v$.

4. Jam vero quum Sol singulis diebus variam longitudinem assequatur, & ejus longitudinis variatio intra diem sat parva sit, uti ex Astronomicis constat, licebit variationem eandem instar differentialis tractare, & aequalem ponere longitudinis elemento dv. Porro quoniam huic diurnae variationi dv (§. 2.)

proportionalis eſt radiorum Solarium numerus intra diei ſpatium in Terram vibratorum, perſpicuum eſt, ſi calor diurnus Æquatoris, & Poli ducatur in dv, gigni elementum caloris annui indefiniti, qui nimirum reſpondet tempori, quo Sol ad indeterminatam longitudinem v pervenit. Quapropter elementum caloris annui ſub Æquatore erit $dv\,\sin.h\sqrt{(1-\sin.^2\varphi\,\sin.^2 v)}$, & ſub Polis erit $\pi dv\,\sin.\varphi\,\sin.v$. Harum formularum integratio ita erit abſolvenda, ut integralia evaneſcant una cum ipſa longitudine v; fingimus enim, actionem Solis calefacientis tunc incipere cum Sol Arietis ſignum ingreditur, ſive cum nulla eſt ejuſdem longitudo. Caeterum vel me non monente patet, nullam in hoc calculo rationem haberi caloris, qui noctis tempore a corporibus decedit, nullam actionis, qua calor calori additus hujus vim intendit, nullam denique caloris reflexi, qui directum diverſimode afficit, augetque vehementer; quae ſane omnia in calculum introducta Problema efficerent inextricabile, implexum, & hodiernae Analyſi penitus inacceſſum.

5. Quum igitur Calor Æquatorius toto illo tempore indefinito, quo Sol deſcribit Eclipticae arcum v exprimatur integrali formula $\int dv\,\sin.h\sqrt{(1-\sin.^2\varphi\,\sin.^2 v)}$; ad hujus formulae integrationem rite abſolvendam animadverto eſſe $\sqrt{(1-\sin.^2\varphi\,\sin.^2 v)} = 1 - \frac{\sin.^2\varphi\,\sin.^2 v}{2}$

$$-\frac{\sin.^4\varphi\,\sin.^4 v}{2.2.2.} - \frac{\sin.^6\varphi\,\sin.^6 v}{2.2.2.2.} - \frac{5\,\sin.^8\varphi\,\sin.^8 v}{2.2.2.2.2.4}$$

$$-\frac{7\,\sin.^{10}\varphi\,\sin.^{10} v}{2.2.2.2.2.2.4} - \frac{7.9\,\sin.^{12}\varphi\,\sin.^{12} v}{2.2.2.2.2.2.2.4.6}$$

$$-\frac{9.11\,\sin.^{14}\varphi\,\sin.^{14} v}{2.2.2.2.2.2.2.2.4.6} - \frac{9.11.13.\sin.^{16}\varphi\,\sin.^{16} v}{2.2.2.2.2.2.2.2.2.4.6.8}$$

$$-\frac{11.13.15\,\sin.^{18}\varphi\,\sin.^{18} v}{2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.4.6.8} - \&c.$$

Tum duco terminos hoſce omnes in $dv\,\sin.h$, & ſingulorum productorum integrationem aggredior.

6. Itaque conſtat ex Integrali Calculo, eſſe

I.

$$\int dv\,\sin.h = v\,\sin.h$$

II.

$\int dv\,\sin.^2 v = -\tfrac{1}{2}\sin.v\,\cos.v + \tfrac{1}{2}v$; atque iccirco

$$-\tfrac{1}{2}\sin.h\,\sin.^2\varphi\int dv\,\sin.^2 v = \frac{\sin.h\,\sin.^2\varphi\,\sin.v\,\cos.v}{2.2}$$

$$-\frac{v\,\sin.h\,\sin.^2\varphi}{2.2}$$

III.

$$\int dv\,\sin.^4 v = -\tfrac{1}{4}\sin.^3 v\,\cos.v - \frac{3\sin.v\,\cos.v}{2.4} + \frac{3v}{2.4};$$

$$-\frac{\sin.h\,\sin.^4\varphi}{2.2.2}\int dv\,\sin.^4 v = \frac{\sin.h\,\sin.^4\varphi\,\sin.^3 v\,\cos.v}{2.2.2.4}$$

$$+\frac{3\sin.h\,\sin.^4\varphi\,\sin.v\,\cos.v}{2.2.2.2.4}-\frac{3\,v\sin.h\,\sin.^4\varphi}{2.2.4.4.}$$

IV.

$$\int dv\,\sin.^6\varphi=-\tfrac{1}{6}\cos.v\,\sin.^5v-\frac{5\cos.v\,\sin.^3v}{4.6}$$
$$-\frac{5.3\cos.v\,\sin.v}{2.4.6}+\frac{5.3v}{2.4.6};$$
$$-\frac{\sin.h\,\sin.^6\varphi}{2.2.2.2}\int dv\,\sin.^6v=\frac{\sin.h\,\sin.^6\varphi\cos.v\,\sin.^5v}{2.2.2.2.6}$$
$$+\frac{5\sin.h\,\sin.^6\varphi\cos.v\,\sin.^3v}{2.2.2.2.4.6}+\frac{5.3\sin.h.\,\sin.^6\varphi\,\cos.v\,\sin.v}{2.2.2.2.2.4.6}$$
$$-\frac{5.3v\,\sin.h\,\sin.^6\varphi}{2.2.2.2.2.4.6}$$

V.

$$\int dv\,\sin.^8v=-\tfrac{1}{8}\cos.v\,\sin.^7v-\frac{7\cos.v\,\sin.^5v}{6.8}$$
$$-\frac{7.5\cos.v\,\sin.^3v}{8.6.4}-\frac{7.5.3\cos.v\,\sin.v}{8.6.4.2}+\frac{7.5.3v}{8.6.4.2};$$
$$-\frac{5\sin.h\,\sin.^8\varphi}{2.2.2.2.2.4}\int dv\,\sin.^8v=\frac{5\sin.h\,\sin.^8\varphi\cos.v\,\sin.^7v}{2.2.2.2.2.4.8}$$
$$+\frac{5.7\sin.h\,\sin.^8\varphi\cos.v\,\sin.^5v}{2.2.2.2.2.4.6.8}+\frac{5.5.7\sin.h\,\sin.^8\varphi\cos.v\,\sin.^3v}{2.2.2.2.2.4.4.6.8}$$
$$+\frac{3.5.5.7\sin.h\,\sin.^8\varphi\cos.v\,\sin.v}{2.2.2.2.2.2.4.4.6.8}-\frac{3.5.5.7v\sin.h\,\sin.^8\varphi}{2.2.2.2.2.2.4.4.6.8}$$

VI.

&c.

Accipiatur jam horum terminorum ſumma, & vocetur A coefficiens producti $\cos.v\,\sin.v$, B coefficiens producti $\cos.v\,\sin.^3v$, C coefficiens producti $\cos.v\,\sin.^5v$, D coefficiens producti $\cos.v\,\sin.^7v$, atque ita porro: hinc habetur $\int dv\,\sin.h\,\sqrt{(1-\sin.^2\varphi\,\sin.^2v)}$
$= A\cos.v\,\sin.v + B\cos.v\,\sin.^3v + C\cos.v\,\sin.^5v$
$+ D\cos.v\,\sin.^7v + \&c.$

$$\left.\begin{array}{r}+\sin.h\\ -\dfrac{\sin.h\,\sin.^2\varphi}{2.2}\\ -\dfrac{3\sin.h\,\sin.^4\varphi}{2.2.4.4}\\ -\dfrac{3.3.5\sin.h\,\sin.^6\varphi}{2.2.4.4.6.6}\\ -\dfrac{3.3.5.5.7\sin.h\,\sin.^8\varphi}{2.2.4.4.6.6.8.8}\\ -\&c.\end{array}\right\}v$$

In hac integratione conſtans nulla addenda eſt, quod evaneſcente v Calor omnis una cum integrali indefinito evaneſcit.

7. Quum porro integrale modo inventum exhibeat Calorem Solis Æquatorium toto illo tempore indeterminato, quo Sol ab initio Arietis indefinitam longitudinem v adipiſcitur, facile jam erit Calorem invenire tempori cuivis determinato reſpondentem. Quaeratur ex. gr. Calor ſub Æquatore per totum tempus Anni

dimidii: In hac hypothesi fit $v = 180° = \pi$, & in praecedenti formula ob $\mathit{fin.}\, v = 0$, evanescunt termini omnes praeter ultimum, qui convertitur in $\pi\, \mathit{fin.}\, h \left(1 - \frac{\mathit{fin.}^2 \varphi}{2.2} - \frac{3\,\mathit{fin.}^4 \varphi}{2.2.4.4} - \frac{3.3.5\,\mathit{fin.}^6 \varphi}{2.2.4.4.6.6} - \frac{3.3.5.5.7\,\mathit{fin.}^8 \varphi}{2.2.4.4.6.6.8.8} - \&c.\right) =$ Calori Æquatorio per dimidium annum; proindeque Calor sub Æquatore per annum integrum repraesentatur a duplo ipsius formulae, nimirum $2\,\pi\, \mathit{fin.}\, h \left(1 - \frac{\mathit{fin.}^2 \varphi}{2.2} - \frac{3\,\mathit{fin.}^4 \varphi}{2.2.4.4} - \frac{3.3.5\,\mathit{fin.}^6 \varphi}{2.2.4.4.6.6} - \frac{3.3.5.5.7.\mathit{fin.}^8 \varphi}{2.2.4.4.6.6.8.8} - \&c.\right)$, quae sane quantitas seriem complectitur valde convergentem, ut per se liquet.

8. Praeterea inventus est (§. 4.) Calor Polaris $= \int \pi\, dv\, \mathit{fin.}\, \varphi\, \mathit{fin.}\, v$, nimirum, facta integratione, $= -\pi\, \mathit{fin.}\, \varphi\, \mathit{cos.}\, v +$ Const. Oritur autem Const. $= \pi\, \mathit{fin.}\, \varphi$, quod posito $v = 0$, etiam Calor fit nihilo aequalis. Quamobrem invenitur Polaris Calor $= \pi\, \mathit{fin.}\, \varphi\, (1 - \mathit{cos.}\, v.)$. Si jam sumitur $v = 180°$, prodit $\mathit{cos.}\, v = -1$, & $-\mathit{cos.}\, v = 1$; atque ideo quantitas $\pi\, \mathit{fin.}\, \varphi\, (1 - \mathit{cos.}\, v)$ mutatur in $2\,\pi\, \mathit{fin.}\, \varphi$. Eapropter Polaris Calor sex integris mensibus perseverans repraesentatur quantitate $2\,\pi\, \mathit{fin.}\, \varphi$, quae sane

quantitas Calorem quoque totius anni indigitabit, quum altero anni dimidio Sol sit Polo inconspicuus, & infra horizontem delitescat.

9. Hinc itaque habetur comparatio Caloris annui sub Æquatore, & Polo; est enim annuus Æquatoris Calor ad annuum Poli Calorem quemadmodum est $2\,\pi\, \mathit{fin.}\, h \left(1 - \frac{\mathit{fin.}^2 \varphi}{2.2} - \frac{3\,\mathit{fin.}^4 \varphi}{2.2.4.4} - \frac{3.3.5\,\mathit{fin.}^6 \varphi}{2.2.4.4.6.6} - \frac{3.3.5.5.7\,\mathit{fin.}^8 \varphi}{2.2.4.4.6.6.8.8} - \&c.\right)$ ad $2\,\pi\, \mathit{fin.}\, \varphi$, sive uti $\mathit{fin.}\, h \left(1 - \frac{\mathit{fin.}^2 \varphi}{2.2} - \frac{3\,\mathit{fin.}^4 \varphi}{2.2.4.4} - \&c.\right)$ ad $\mathit{fin.}\, \varphi$, hoc est uti $P\, \mathit{fin.}\, h$ ad $\mathit{fin.}\, \varphi$, posito scilicet $P = 1 - \frac{\mathit{fin.}^2 \varphi}{2.2} - \frac{3\,\mathit{fin.}^4 \varphi}{2.2.4.4} - \&c.$ Ut itaque utriusque Caloris comparatio ad numeros transferatur, animadverto, arcum semidiurnum sub Æquatore pro varia Solis declinatione aliquam licet parvam variationem subire; nam in Tabula praecedentis Disquisitionis §. 12. novies invenitur $h = 90°\, 33'$, septies occurrit $h = 90°\, 34'$, quinquies reperitur $h = 90°\, 35'$, demum ter deprehenditur $h = 90°\, 36'$; atque hinc medius ipsius h valor prodit circiter $90°\, 34'$. Ecce jam calculi typus

$\varphi = 23^\circ\, 28'$ $\qquad h = 90^\circ\, 34'$

$\log.\ \mathit{fin}.\ \varphi$	9,6001181
$\log.\ \mathit{fin}.^2 \varphi$	9,2002362
$\log.\ 4$	0,6020600
$\log. \frac{\mathit{fin}.^2 \varphi}{2.2}$	8,5981762
$-\frac{\mathit{fin}.^2 \varphi}{2.2}$	$-$0,039644
$\log.\ \mathit{fin}.^4 \varphi$	8,4004724
$\log.\ 3$	0,4771213
$\log.\ 3\ \mathit{fin}.^4 \varphi$	8,8775937
$\log.\ 2.2.4.4$	1,8061800
$\log. \frac{3\, \mathit{fin}.^4 \varphi}{2.2.4.4}$	7,0714137
$-\frac{3\, \mathit{fin}.^4 \varphi}{2.2.4.4}$	$-$0,001179
$\log.\ \mathit{fin}.^6 \varphi$	7,6007086
$\log.\ 3.3.5$	1,6532125
$\log.\ 3.3.5\, \mathit{fin}.^6 \varphi$	9,2539211
$\log.\ 2.2.4.4.6.6$	3,3624825
$\log. \frac{3.3.5\, \mathit{fin}.^6 \varphi}{2.2.4.4.6.6}$	5,8914386

$-\frac{3.3.5\, \mathit{fin}.^6 \varphi}{2.2.4.4.6.6}$	$-$0,000078
$\log.\ \mathit{fin}.^8 \varphi$	6,8009448
$\log.\ 3.3.5.5.7$	3,1972806
$\log.\ 3.3.5.5.7\, \mathit{fin}.^8 \varphi$	9,9982254
$\log.\ 2.2.4.4.6.6.8.8$	5,1686625
$\log. \frac{3.3.5.5.7\, \mathit{fin}.^8 \varphi}{2.2.4.4.6.6.8.8}$	4,8295629
$-\frac{3.3.5.5.7\, \mathit{fin}.^8 \varphi}{2.2.4.4.6.6.8.8}$	$-$0,000007

Eſt igitur $P = 1 - 0{,}039644 - 0{,}001179 - 0{,}000078 - 0{,}000007 = 0{,}959092$.

Quare

$\log.\ P$	9,9818603
$\log.\ \mathit{fin}.\ h$	9,9999788
$\log.\ P\ \mathit{fin}.\ h$	9,9818391
$P\ \mathit{fin}.\ h$	0,959045
$\mathit{fin}.\ \varphi$	0,398215

Quapropter Calor Annuus Æquatorius ſe habet ad annuum Poli Calorem ut 959045 ad 398215, ſive ut 959 ad 398 vel proxime ut 17 ad 7, & ſemeſtris utrimque Calor ut 17 ad 14.

10. Formulae $\int dv\, sin.\, h \sqrt{(1 - sin.^2 \varphi\, sin.^2 v)}$ conſideratio elegantiſſimam ac prorſus miram patefacit Ellipſeos proprietatem, & cum annuo Solis Calore in regionibus aequatoriis analogiam atque conſenſum. Si enim ellipſis deſcribatur, cujus ſemiaxis major ſit unitati aequalis, excentricitas vero ſinum obliquitatis Eclipticae adaequet, & huic Ellipſi circulus circumſcribatur radium habens ſemiaxi majori aequalem; Ellipſeos perimeter ducta in ſinum arcus ſemidiurni ſub Æquatore, ſive in ſinum 90.° 34' Calorem Æquatoris annuum repraeſentat, circuli vero circumſcripti peripheria ducta in Ellipſis excentricitatem Calorem annuum Polarem exprimit. Reapſe ſemiaxe
Fig. 3 majori $CP = 1$, excentricitate $FC = sin.\, \varphi$ deſcribatur ſemiellipſis PEQ, & radio eodem PC ſemicirculus POQ, & producantur in O, & M ſemiaxis minor CE, & ordinata DN. Accepto arcu $OM = v$, ſeu Solis longitudini, oritur $DC = sin.\, v$, $MD = cos.\, v = \sqrt{(1 - sin.^2 v)}$. Eſt autem ex natura Ellipſis $EC = \sqrt{(PC^2 - FC^2)} = \sqrt{(1 - sin.^2 \varphi)}$, & $OC : EC :: MD : ND$, ſive $1 : \sqrt{(1 - sin.^2 \varphi)} :: \sqrt{(1 - sin.^2 v)} : cos.\, \varphi\, cos.\, v$. Igitur $ND = cos.\, \varphi\, cos.\, v$. Capiatur jam differentiale ordinatae ND, quod eſt $-dv\, sin.\, v\, cos.\, \varphi$, ſeu $-dv\, sin.\, v \sqrt{(1 - sin.^2 \varphi)}$, hujuſque quadratum $dv^2\, sin.^2 v (1 - sin.^2 \varphi)$, tum differentiale abſciſſae centralis

CD, quod invenitur $dv\, cos.\, v$, ſive $dv \sqrt{(1 - sin.^2 v)}$, & hujus quadratum $dv^2 (1 - sin.^2 v)$: Summa hujuſmodi quadratorum oritur $= dv^2 (1 - sin.^2 \varphi\, sin.^2 v)$, & ejus radix quadrata praebet elementum arcus Elliptici EN; ac proinde detegitur arcus ipſe $EN = \int dv \sqrt{(1 - sin.^2 \varphi\, sin.^2 v)}$, in qua ſane expreſſione integrali ſi accipitur $v = 360°$, ſive = circuli peripheriae, abit EN in perimetrum totam Ellipſis. Igitur in hypotheſi $v = 360°$ ſe habet $\int dv\, sin.h \sqrt{(1 - sin.^2 \varphi\, sin.^2 v)}$ ad $2\pi\, sin.\varphi$, quemadmodum Calor annuus Æquatoris ad Calorem annuum Poli; nimirum ut praedictae Ellipſis perimeter ducta in ſinum 90.° 34' ſe habet ad peripheriam circuli circumſcripti ductam in Ellipſis excentricitatem, ita Calor Æquatorius ad Polarem.

11. Liceat hic obiter animadvertere, ex evolutione quantitatis P, ſeu ſeriei $1 - \frac{sin.^2 \varphi}{2.2} - \frac{3\, sin.^4 \varphi}{2.2.4.4}$ — &c. (§. 9.) prodire rationem inter perimetrum Ellipſis PEQ, & peripheriam circuli POQ, quippe Ellipſis perimeter invenitur $= 2\pi P = 2\pi \times 0{,}959092$, & circuli circumſcripti peripheria $= 2\pi$. Igitur perimeter Ellipſis eſt ad circuli peripheriam uti $2\pi \times 0{,}959092$ ad 2π, ſive ut 959092 ad 1000000, vel ut 24 ad 25 fere.

12. Celeberrimus Geometra, & Aſtronomus To-

bias MAYERUS, ut Caloris Medii quantitatem non modo ſub Æquatore & Polo, ſed in omnibus Terrae locis & ſub quacumque latitudine definiret, formulam propoſuit ſimplicem oppido & elegantem, ad cujus formulae ductum Tabulas binas conſtruxit, quae medium Caloris gradum ſecundum Scalas Thermometri Reaumuriani, & Fahrenheitiani in variis latitudinibus repraeſentant. Praeſtat ipſum hac de re perſpicue diſſerentem audire: *Primum ergo conſtat* (inquit ille) *in unoquoque locorum terreſtrium certum definitumque regnare caloris gradum, qui medium tenet inter aeſtivum & hybernum, itemque inter diurnum & nocturnum, atque a climate, cui locus ſubjacet, ſive elevatione poli ejus loci pendet. Uti enim radii ſolares eo obliquiores in ſuperficiem terrae incidunt, quo magis ab aequatore ſunt remoti; ita minorem eſſe oportet hunc medium caloris gradum in locis majoris latitudinis. Facile autem oſtendi poteſt, ſi gradus medius ſecundum ſcalam thermometri cujuslibet ſub Æquatore ponatur* $= m$, *ſub polis vero* $= m - n$, *fore gradum medium ſub latitudine quavis* φ *proxime* $= m - n \sin.^2 \varphi$; *ſive differentiam inter calorem medium ſub aequatore & eum, qui loco latitudinis* φ *convenit, eſſe in ratione duplicata ſinus latitudinis. Hinc igitur, cognito gradu medio ſub duabus diverſis latitudinibus, licebit definire valores litterarum* m & n, *ac proinde gradum medium ſub alia quacumque latitudine* (a).

13. Hiſce poſitis ſtatuit MAYERUS gradum caloris medium in locis depreſſioribus Æquatori proximis eſſe gr. 24. in ſcala Thermometri Reaumuriani, ſub latitudine vero 49°, aut 50° eundem eſſe gr. 9 ſupra congelationis terminum, quantum quidem MAYERO ex aliquali comparatione obſervationum thermometricarum ſub his latitudinibus inſtitutarum licuit colligere. Hinc vero deducitur aequatio $9 = m - n \sin.^2 \varphi = 24 - n \sin.^2 49° = 24 - \frac{9}{16} n$, ſive $n = 26\frac{2}{3}$, & hac ſubtracta a calore medio ſub Æquatore, ſeu a 24, oritur gradus caloris medius ſub Polis $= -2\frac{2}{3}$ infra congelationis limitem. At ob obſervationes neque ſumme accuratas, neque ſumma cura inter ſe comparatas, loco $-2\frac{2}{3}$ aſſumit MAYERUS gradum medium ſub Polis $= 0$, talem nempe, quo aqua incipit congelari. Proinde aſſumpto tam m quam $n = 24$, oritur medius caloris gradus ſub latitudine quavis φ hac forma repraeſentatus $24 (1 - \sin.^2 \varphi) = 24 \cos.^2 \varphi = 12 + 12 \cos. 2\varphi$, quae ſequentem Tabulam largitur.

(a) Vid. Tobiae MAYERI *Opera Inedita* Vol. I. pag. 4. Gottingae 1775.

TABULA CALORIS MEDII

Secundum Scalam Reaumurianam.

Latitudo Loci Gr.	*Gradus Therm.* *Reaum.*
0	24
5	23 $\frac{3}{4}$
10	23 $\frac{1}{4}$
15	22 $\frac{5}{8}$
20	21 $\frac{1}{4}$
25	19 $\frac{3}{4}$
30	18
35	16
40	14
45	12
50	10
55	8
60	6
65	4 $\frac{1}{4}$
70	2 $\frac{3}{4}$
75	1 $\frac{1}{2}$
80	0 $\frac{3}{4}$
85	0 $\frac{1}{4}$
90	0

14. Aſſumpta ſcala alia quacumque, quae datam habeat rationem ad Reaumurianam, facilis negotii res erit ſecundum ſcalam hanc novam ex praemiſſa formula tabulam conſtruere Caloris medii ſub quacumque latitudine repraeſentatricem. Quum itaque in Scala Fahrenheitiana gradus 84 reſpondeant gradibus 24 Reaumurianae, & congelationis gradus in illa ſit 32, invenitur medius caloris gradus ſub latitudine φ hac forma expreſſus $84 - 52\,\mathit{ſin}^2\,\varphi = 84 - 52 + 52\,\mathit{cos}^2\,\varphi = 32 + 52\,\mathit{cos}^2\,\varphi = 32 + 26 + 26\,\mathit{cos}.\,2\,\varphi = 58 + 26\,\mathit{cos}.\,2\,\varphi$, ad cujus ductum ſequens contexitur

TABULA CALORIS MEDII

Secundum Scalam Fahrenheitianam

Latitudo Loci Gr.	*Gradus Therm.* *Fahrenheit.*
0	84
5	83 $\frac{1}{2}$
10	82 $\frac{1}{2}$
15	80 $\frac{1}{2}$
20	78
25	74 $\frac{1}{2}$

Latitudo Loci Gr.	*Gradus Therm. Fahrenheit.*
30	71
35	67
40	62 ½
45	58
50	53 ½
55	49
60	45
65	41 ½
70	38
75	35 ½
80	33 ½
85	32 ½
90	32

15. *Atque hic eſt*, inquit MAYERUS, *gradus caloris medius loci cujuſcumque loco medio planetarum in aſtronomicis non inepte comparandus. Quemadmodum autem Aſtronomi ſolent huic loco medio plures aequationes adplicare, atque adeo magis magiſque ad veram adpropinquare: ita ſimili quoque modo correctiones, quibus gradus caloris medius ad verum poſſit reduci, inveſtigandae ſunt.* Quum itaque calor ab ima terrae ſuperficie aſcendendo ſenſim ſenſimque minuatur ad certam uſque altitudinem, ultra quam incipit rurſus augeri, hocque caloris in majoribus altitudinibus decrementum tum montes vel in ipſa Zona Torrida perpetua nive geluque rigentes, tum notiſſimae Gallorum Mathematicorum obſervationes in Peruvianis montibus prope Æquatorem inſtitutae aperte demonſtrent; inde correctionem praecipuam MAYERUS deduxit ab altitudine loci petitam, poſuitque interim caloris gradum a ſuperficie maris aſcendendo decreſcere in ea ratione qua augetur altitudo: quo nixus fundamento hanc facillimi uſus regulam condidit: „ Si data elevatione loci ſupra maris ſuperficiem ejuſque latitudine geographica inveſtigandus ſit gradus caloris illius loci medius, quaeratur primum ad datam latitudinem gradus medius ſecundum ſcalam Reaumurianam ſive per formulam ſupra traditam, ſive ex tabula ibidem expoſita; deinde altitudinis loci in hexapedis Pariſinis expreſſae pars centeſima, quae correctionem hanc primam exhibet, ab illo gradu auferatur, reſiduum erit gradus medius dati loci quaeſitus “.

16. Verum dolendum eſt, ingenioſiſſimam MAYERI methodum non uſque adeo generalem eſſe, ut omnibus terrae locis climatibuſque conveniat; nam adnotante Mayerani operis editore LICHTENBERGIO conſenſus inter altitudines medias Thermometri obſervatas, &

computatas magnus utique est in toto illo terrarum tractu, qui parallelum Promontorii Bonae Spei, & Holmiensem, nec non meridianum Holmiensem, & Mexicanum interjacet: Hisce vero limitibus praetergressis formula Mayeriana a veritate longe aberrat, ita ut altitudines mediae Thermometri PETROPOLI & WILNAE v. c. observatae deficiant, illa gradibus 8, 5; haec 10, 3 ab ea, quam Mayeriana formula praebet.

17. Caeterum in inventione formulae $12 + 12\, cos.\, 2\varphi$ videtur MAYERUS eo praesertim respexisse, ut calor medius sub Æquatore *Maximus*, sub Polis *Minimus* inde consequeretur; cui quidem conditioni formula ipsa satisfacit, nam ejus differentiale $-\ 24\, d\varphi\, sin.\, 2\, \varphi$ nihilo aequatum duos praebet latitudinis φ valores, alterum $\varphi = 0$, alterum $\varphi = 90°$, quorum prior Æquatorem, posterior Polum designat. Ex priori autem τῦ φ valore haberi Maximum, ex secundo Minimum vel inde patet, quod secunda differentia $-\ 48\, d\varphi^2 cos.\, 2\, \varphi$ negativa sit, seu $-\ 48\, d\varphi^2$ sumpto $\varphi = 0$, & contra affirmativa, scilicet $+\ 48\, d\, \varphi^2$ facto $\varphi = 90°$. Verum hujusmodi conditionis complementum, quo niti Mayeriana formula videtur, pro accurato formulae ipsius examine haberi nullo modo potest, quum alia multo generalior $a + b\, cos.\, 2\, \varphi + c\, cos.\, 4\, \varphi + d\, cos.\, 6\, \varphi +$ &c. eandem conditionem aeque impleat.

18. Inventa jam in praecedenti Disquisitione formula $2\, sin.\, h\, cos.\, \lambda\, cos.\, \delta \pm 2h\, sin.\, \lambda\, sin.\, \delta$ exprimente Calorem Solis Diurnum pro qualibet Solis declinatione, & latitudine terrestri; & cautione adhibita usurpandi secundum formulae terminum cum signo affirmativo si declinatio & latitudo ejusdem nominis fuerint, cum negativo si diversi; oportet nunc Calorem Solis Annuum non sub Æquatore dumtaxat, & Polo, quod antea praestitimus, sed in quacumque elevatione Poli, seu in quolibet Telluris loco supputare ac definire. Utar ad hanc rem eximia NEWTONI methodo *ducendi curvam geometricam per data quotcumque puncta*, quam NEWTONUS ad LEIBNITIUM scribens merito inter inventa pulcherrima numerabat, quamque summus Geometra Rogerius COTESIUS insigni Opusculo *De Methodo Differentiali Nevvtoniana* elegantissime demonstravit auxitque. Sumantur itaque in quavis Terrae regione dies bini dimidiato anno a se invicem distantes, in quibus iccirco eadem erit declinatio Solis, sed ejusdem nominis cum latitudine loci pro die uno, diversi nominis pro die altero opposito; vocentur h, h' arcus dierum ipsorum semidiurni: eritque calor diei illius, quo Sol declinationem habet cognominem latitudini, $2\, sin.\, h\, cos.\, \lambda\ cos.\, \delta + 2\, h\, sin.\, \lambda\, sin.\, \delta$, calor diei oppositi $2\, sin.\, h'\, cos.\, \lambda\, cos.\, \delta - 2\, h'\, sin.\, \lambda\, sin.\, \delta$, & calor

dierum binorum ſimul $= 2\cos.\lambda\cos.\delta\,(\sin.h + \sin.h')$ $+ 2\sin.\lambda\sin.\delta\,(h - h')$. Quum autem ex Trigonometriae formulis habeatur $\sin.h + \sin.h' = 2\sin.\frac{h+h'}{2}\times$ $\cos.\frac{h-h'}{2} = 2\sin.\frac{180^\circ}{2}\cos.\frac{h-h'}{2} = 2\cos.\frac{h-h'}{2}$; propterea calor binorum dierum oppoſitorum fiet $=4\cos.\lambda\cos.\delta\cos.\frac{h-h'}{2} + 4\left(\frac{h-h'}{2}\right)\sin.\lambda\sin.\delta$. Hic porro calor ſi diebus ſingulis ab aequinoctio uſque ad ſolſtitium ad hujus praeſcriptum formulae rite ſupputetur, aſſequimur calorem ſemiannuum, cujus proinde duplum dat calorem integrum anni unius; in quaeſtione etenim adeo abſtruſa, ac tot undique ſepta difficultatibus poſtulati loco aſſumere licet, calorem Solis duabus oppoſitis anni tempeſtatibus aggregatum eundem eſſe cum illo, qui binis aliis tempeſtatibus oppoſitis accumulatur. Sed quoniam haec ſupputatio ſemel & nonageſies repetita laboris eſſet ac moleſtiae pleniſſima, operae pretium erit, ſummam illam caloris, qui ab aequinoctio verno ad ſolſtitium aeſtivum, & ab aequinoctio autumnali ad ſolſtitium hybernum acervatur, per approximationem inquirere. Itaque ex Aſtronomicis manifeſtum eſt, in quolibet Terrae loco data Solis longitudine haberi declinatio-

nem δ ex analogia, uti radius ad ſinum longitudinis Solis, ita ſinus obliquitatis Eclipticae ad ſinum declinationis, ſeu ad $\sin.\delta$: inventa porro declinatione Solis aſſequimur differentiam aſcenſionalem $\frac{h-h'}{2}$ ex altera analogia uti radius ad tangentem latitudinis, ita tangens declinationis ad ſinum differentiae aſcenſionalis. Eapropter aſſumpta Solis longitudine graduum 0, 15°, 30°, 45°, &c. ac poſita Eclipticae obliquitate $= 23°\frac{1}{2}$ (in hac quippe quaeſtione negligimus minutias), pro Urbe cujus latitudo foret $51°\frac{1}{2}$ cujuſmodi eſſet GOTTINGA, ſequens ſtruitur

T A B E L L A

Solis Longitudo	*Declinatio ſeu* δ	*Differentia Aſcenſionalis ſeu* $\frac{h-h'}{2}$
0	0	0
15°	5°. 55'	7°, 483
30°	11°. 31'	14°, 816
45°	16°. 23'	21°, 68
60°	20°. 12'	27°, 55
75°	22°. 39'	31°, 63
90°	23°. 30'	33°, 13

19. In tertia hujus tabulae columna differentia ascensionalis exhibetur per gradus, partesque gradus decimales ad majorem subsequentis calculi facilitatem. Inventa jam pro latitudine $51^{\circ}\frac{1}{2}$ tum declinatione Solis tum differentia ascensionali singulis quindecim gradibus longitudinis Solis respondente construitur altera

T A B E L L A

Solis Longitudo	*Productum* $\cos.\,\delta\,\cos.\frac{h-h'}{2}$	*Productum* $\frac{h-h'}{2}\,\mathit{sin.}\,\delta$
0	1, 0000	0
15°	0, 9862	0, 7723
30°	0, 9473	2, 9537
45°	0, 8915	6, 1128
60°	0, 8321	9, 5138
75°	0, 7857	12, 1827
90°	0, 7505	13, 2107

ubi producta tertiae columnae fiunt multiplicando valorem quemvis *sin.* δ per respondentem differentiam ascensionalem qualis exhibetur in tertia primae tabulae columna. Sed quoniam in producto $\left(\frac{h-h'}{2}\right)$ *sin.* δ differentia ascensionalis $\frac{h-h'}{2}$ accipienda est non graduum numero expressa, sed radii partibus repraesentata, ut per se palam est; iccirco hujus tertiae columnae numeri reductionem subibunt, quam postmodum indicabimus. Interea spectentur numeri secundae columnae instar septem aequidistantium ordinatarum ad Curvam generis parabolici, cujus area extremis interjecta exhibetur per formulam $\frac{41\,A+216\,B+27\,C+272\,D}{840}R$ (*a*). In hac vero formula designat A summam ordinatarum extimarum, hoc est summam primae, & ultimae $=1,\,0000+0,\,7505=1,\,7505$; B summam proximarum extimis, hoc est summam secundae & penultimae $=0,\,9862+0,\,7857=1,\,7719$; C summam sequentium, nempe tertiae & antepenultimae $=0,\,9473+0,\,8321=1,\,7794$; D quartam ordinatam $=0,\,8915$: intervallum denique inter extimas ordinatas, nimirum areae quadrandae basis indigitatur per litteram $R=91$, quotus scilicet est dierum numerus ab aequinoctio ad solstitium. Ducta itaque hac area in 4 $cos.\lambda$, numerica supputatio dabit 4 $Ar.\times cos.\lambda$ $=200,\,56$. Idem fiat in numeris tertiae columnae, per quos rursus septem aequidistantes ordinatae intelliguntur repraesentari, fitque iterum $A=0+13,\,2107$ $=13,\,2107$; $B=0,\,7723+12,\,1827=12,9550$; $C=2,\,9537+9,\,5138=12,\,4675$; $D=6,\,1128$;

(*a*) Vid. COTES. Opusc. cit. Prop. VI.

$R = 91$. Area hinc per formulam Cotesianam elicienda multiplicari debet per longitudinem arcus gradus unius, hoc est per $0,01745$, eo quod in numeris tertiae columnae factorem $\frac{h-h'}{2}$ involventibus fieri debet conversio factoris ipsius de numero graduum in partes radii per unitatem designati: quod quidem assequimur per vulgatissimam analogiam

$1° : n° :: 0,01745$: ad quartum $= 0,01745 \times n$, qui longitudinem exprimit arcus numerum n graduum continentis. Ducta autem quantitate $0,01745 \times Ar'$. per $4 \, sin.\lambda$, invenietur $4 \times 0,01745 \times Ar'. \times sin.\lambda = 31,96$. Igitur $4 \, Ar. \times cos.\lambda + 4 \times 0,01745 \times Ar'. \times sin.\lambda = 200,56 + 31,96 = 232,52$; atque hujus duplum $465,04$ exhibet calorem annuum integrum pro elevatione Poli $51° \frac{1}{2}$, cujusmodi est GOTTINGAE, aut LONDINI.

20. Sub Æquinoctiali Circulo, ubi $\lambda = 0$, $\frac{h-h'}{2} = 0$, Caloris quantitas binis diebus semestri spatio distantibus collecta $4 \, cos.\lambda \, cos.\delta \, cos.\frac{h-h'}{2} + 4 \left(\frac{h-h'}{2}\right) sin.\lambda \, sin.\delta$ abit in $4 \, cos.\delta$. Igitur summam omnium $cos.\delta$ oportet invenire. Est autem

Longitudo Solis	*Declinatio* δ	$cos.\delta$
0	0°	1,0000
15°	5°. 55'	0,9946
30°	11°. 30'	0,9799
45°	16°. 23'	0,9594
60°	20°. 12'	0,9385
75°	22°. 39'	0,9229
90°	23°. 30'	0,9170

Quapropter $A = 1,9170$; $B = 1,9175$; $C = 1,9184$; $D = 0,9594$; $R = 91$; quibus valoribus in Cotesiana formula substitutis oritur Area $= 88,48$: haec autem ducta in 8 exhibet calorem annuum aequinoctialem $= 707,8$. Igitur calor Solis annuus sub Æquatore se habet ad calorem annuum LONDINI, vel GOTTINGAE uti 708 ad 465, hoc est uti 236 ad 155 quamproxime.

21. Quum in praecedenti Disquisitione Calor diurnus sub Polo inventus sit $= 2\pi \, sin.\delta = 6,2832 \, sin.\delta$, sumpto videlicet π pro circuli semiperipheria; assequemur hac eadem methodo calorem Poli semestrem, vel si mavis annuum (altero quippe semestri nullus ob Solis absentiam producitur calor), si summa omnium $sin.\delta$ ab aequinoctio ad proximum solstitium accipia-

tur, eaque ducta in 6, 2832 duplicetur. Ita vero habetur

Longitudo Solis	*Declinatio* δ	*sin* δ
0	0	0
15°	5°. 55'	0, 1031
30°	11°. 30'	0, 1993
45°	16°. 23'	0, 2821
60°	20°. 12'	0, 3453
75°	22°. 39'	0, 3851
90°	23°. 30'	0, 3987

Quamobrem $A = 0,3987$; $B = 0,4882$; $C = 0,5446$; $D = 0,2821$; $R = 91$: atque hisce valoribus in Cotesiana formula subrogatis, prodit area parabolica, quae multiplicata per $2 \times 6,2832$ patefacit semestrem quaesitum Poli calorem $= 2 \times 6,2832 \times Ar. = 269,5$. Est igitur

Calor Annuus

Æquatorius uti 7078

Londinensis, vel Gottingensis 4650

Polaris 2695

12. Sit modo invenienda Caloris Annui mensura in URBE PAPIENSI, in qua scribimus, cujus latitudo, uti notum est, ad 45° : 11' pertingit. Est igitur

Solis longitudo	*Declinatio* δ	*Differentia ascensionalis* $\frac{h-h'}{2}$	*Diff. Ascens. in partibus radii*
0	0	0	0
15°	5° : 55'	4° : 13'	0,073594
30°	11° : 31'	8° : 18'	0, 144861
45°	16° : 23'	12° : 2'	0,210020
60°	20° : 12'	15° : 7'	0,263835
75°	22° : 39'	17° : 14'	0,300777
90°	23° : 30'	17° : 58'	0, 313576

Ex hisce porro inveniuntur producta $cos.\,\delta\; cos.\,\frac{h-h'}{2}$, & $\frac{h-h'}{2}\, sin.\,\delta$, uti sequens Tabella demonstrat

Solis longitudo	*Productum* $cos.\,\delta\; cos.\,\frac{h-h'}{2}$	*Productum* $\frac{h-h'}{2}\, sin.\,\delta$
0	1, 00000	0
15°	0, 99208	0, 00757

Solis longitudo	Productum $\cos.\delta \cos.\frac{h-h'}{2}$	Productum $\frac{h-h'}{2} \sin.\delta$
30°	0, 96960	0, 02892
45°	0, 93831	0, 05924
60°	0, 90602	0, 09110
75°	0, 88144	0, 11583
90°	0, 87234	0, 12509

Hinc usurpata, ut prius, Coteſiana formula, ſumptiſque numeris ſecundae, & tertiae columnae pro ordinatis binarum Curvarum generis parabolici aſſequimur

Pro Curva prima	*Pro Curva altera*
$A = 1,\ 87234$	$A = 0,\ 12509$
$B = 1,\ 87352$	$B = 0,\ 12340$
$C. = 1,\ 87562$	$C = 0,\ 12002$
$D = 0,\ 93831$	$D = 0,\ 05924$
$R = 91$	$R = 91$
$4.\ Area \times cos.\ \lambda = 240,\ 13$	$4.\ Area \times sin.\ \lambda = 15,\ 719$

Quamobrem $4.\ Area \times cos.\ \lambda + 4.\ Area \times sin.\ \lambda = 255,85$,

hujuſque duplum 511,70 ſuppeditat quaeſitam Caloris annui Solaris menſuram ſub elevatione Poli 45° : 11', qualem PAPIÆ agnovimus. Erit igitur

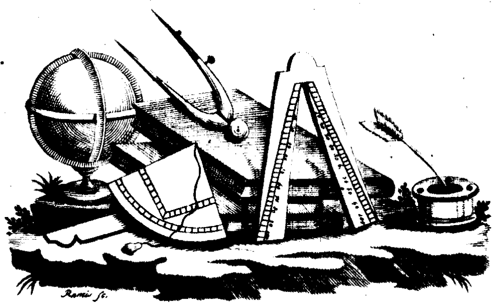
Calor Solaris Annuus

Æquatorius	7078
Papienſis	5117
Londinenſis, vel Gottingenſis . . .	4650
Polaris	2695

23. Hactenus tacite poſuimus, Calorem Solis ab ejus radiis in Tellurem irruentibus unice pendere, eſſeque Caloris ipſius intenſionem numero radiorum ubique proportionalem: neque hanc aſſumptionem infirmat Lunaris lux, quae Plenilunii tempore in foco maximorum ſpeculorum collecta ne minimum quidem caloris excitat ſenſum, ſummeque dilatabili thermometri exquiſitiſſimi liquori expandendo impar eſt. Ea quippe eſt ex ingenioſis a BOUGUERIO captis experimentis (a) Lunaris luminis raritas, ut denſitas radiorum a Sole in Tellurem continuo emiſſorum ter centies millies excedat denſitatem illorum, qui Plenilunii tempore reflectuntur a Luna. Hanc ipſam Lunaris lucis raritatem ſuadet ratiocinatio geometrica firmiſſimis nixa principiis: nam quum Solaris lux a colluſtrato Lunae hemiſphaerio ita repercutiatur, ut poſt reflexionem per totam fere ſuperficiem globi ſemidiame-

(a) Opt. Lib. I. Sect. II. Art. XI.

trum habentis diſtantiae Lunae a Tellure aequalem diffundatur, ſitque adeo ea ſuperficies ad ſuperficiem globi Lunaris ut 46249 ad 1 (accepta nimirum ſemidiametro Lunae apparenti 16', quae ad ſemidiametrum ejus veram ſe habet ut 465 ad 100000); erit iccirco media luminis denſitas a Sole ad Lunam, vel etiam ad Terram directe propagati tot vicibus major denſitate luminis a Luna in Terram repercuſſi (ſi vel totum, quod eſſe nequit, id lumen reflecteretur), quot vicibus excedit ampliſſima illa ingentis ſphaerae ſuperficies aream circuli Lunaris maximi, ſeu quartam Lunaris ſuperficiei partem, quae pars menſuram luminis ante reflexionem repraeſentat, nimirum 184996 vicibus. Quapropter minime erit mirandum, quod tanta Lunaris lucis attenuatio & raritas cum nullo ſit calore conjuncta.



DISQUISITIO III.

De Sanguinis Restitutione hujusque Problematis affinitate, et analogia cum Problemate Anticipationis, *seu pecuniae in antecessum numeratae.*

1. Illuſtris Jatromathematicus Jacobus Keillius in *Tentaminibus Medico-Phyſicis*, Tentamine I. *De Sanguinis quantitate* determinaturus ſanguinis redintegrationem, quae ex quotidiano victu continentem partium interitum reparante proficiſcitur, calculum inaedificat fundamento undique labanti & ruinoſo: comparat ſcilicet Problema hoc cum altero Algebrae Scriptoribus uſitato, quo quaeritur vini quantitas poſt aliquem dierum numerum in dolio ſuperſtes, ſi certa vini menſura quotidie exhauriatur ac tantundem aquae ſemper infundatur. *Sit itaque victus*, inquit citato loco Keillius, *quem ad ſuſtinendas vires, & ad quotidianos partium interitus compenſandos recipimus, librarum quatuor. Hic*

cibus cum sanguine commixtus, & quasi in unum concoctus, cum eo simul in glandulis secernetur: ita ut novus, vetusque uno eodemque tempore amandentur: & primo secernantur in ratione quantitatibus proportionali: Quaeritur jam, quantum veteris sanguinis, post datum temporis spatium in corpore relinquetur. Haec quaestio eadem est, ac si vas aliquod 200. congiis vini repletum esse ponamus, & inde quatuor quotidie exhaustos, totidemque aquae infusos, ut vas plenum semper relinquatur. Quaeritur jam quantum vini post aliquem dierum numerum in vase remanebit. Hoc porro instabili ac lubrico nixus principio KEILLIUS calculum ponit a veritate longe aberrantem, sed eleganti quadam veri specie, & quasi fuco minus attentis & sagacibus imponentem. Itaque quum de quaestione agatur inter Physiologiae Scriptores celeberrima ac nobilissima, de sanguinis nempe reparatione ac mutatione, operae praetium judico rem ex integro aggredi, & Keilliano convulso eversoque fundamento novum ponere calculum minus quidem, quam Keillianus, facilem & expeditum, sed nec minus elegantem, & veritati rerumque naturae magis conformem.

2. Jam in primis penes Physiologorum commendatissimos in confesso est, animalis corporis sanguinem intra diei spatium insensibili perspiratione avolantem, singulis momentis de corpore decedere, singulisque momentis sanguinem novum ex alimentis elaboratum accedere veteri, & jacturas momentaneas reparare. Absurda igitur est comparatio ex vase vinario petita, ex quo non jugiter & continenter, sed simul & semel in die certa vini quantitas exhauritur, & aquae infunditur: ut aequa esset & numeris omnibus perfecta comparatio necesse foret dolium imaginari, ex cujus ostiolo seu foramine vinum continenter efflueret, & per foramen alterum aequale aqua perennis eodem impetu simul influeret. Tunc vero postulare quantum vini post datum temporis intervallum in dolio futurum sit, & contra quanto tempore vinum ad datam mensuram decrescet, idem prorsus est, si caetera paria accipiantur, ac petere quantum veteris sanguinis post aliquem dierum numerum in humano corpore reliquum sit, vel contra quot diebus Sanguis vetus ad datam usque particulam redigetur.

3. In hoc itaque solvendo Problemate calculus informandus erit in hunc modum:

Sit animalis Sanguinis quantitas . . . . $= a$
Pars ejus infinitesima singulis momentis avolans $= p$
Numerus momentorum in die naturali . . . $= n$
Quantitas *mixti* Sanguinis intra diem decedens $= b = np$
Ergo Sanguis vetus in fine primi momenti $= a - p$

Evidens est, subsequentem calculum eodem modo rite procedere, etiamsi reparatio Sanguinis non toto diei tempore, sed paucis intra diem horis absolvatur, eo scilicet intervallo quo Chylosis, & Haematosis perficitur; siquidem in hac hypotesi Haematosis diurnae tempus dividitur in momentorum numerum n, omniaque fiunt quemadmodum in prima hypothesi. Caeterum de hac continenti ac perpetua Sanguinis jactura, & reparatione perbelle differit Facultatis Medicae Parisiensis Socius ROBERTUS in recentissimo Opusculo *De Senectute*. *La nature* (inquit ille) *y pompe* (scilicet in Athmosphaera) *& en attire l' espece d' humidité, dont elle a besoin pour renouveller cette fumée aqueuse qui s' évapore de toute la surface du corps par forme de transpiration. Cette action de pomper, & d' attirer l' humidité, est une faculté de la peau, qu' on ne peut pas révoquer en doute; l' exemple des Bouchers, des Chaircuitiers, des Cuisiniers, donne toutes les preuves que l' on pourroit désirer à cet égard. Ils ont la plupart, ainsi que leurs femmes, la peau blanche, le teint frais & fleuri, & en général, beaucoup d' embonpoint; en un mot ils se nourrissent par la peau. Mais si la nature pompe dans l' athmosphére un suc alimentaire, l' on peut bien croire aussi qu' elle y puise l' eau dont elle a besoin pour s' humecter & se rafraichir.*

Quum autem secundo momento iterum decedat

pars minima p Sanguinis mixti ex vetere $a-p$, & ex novo adveniente, ac prioris jacturam reparante; ut inveniatur Sanguis vetus residuus in fine secundi momenti, fiat $a : p :: a-p : \frac{p(a-p)}{a}$, eritque $\frac{p(a-p)}{a}$ pars veteris Sanguinis in fine secundi momenti amissa.

Quare Sanguis vetus in fine secundi momenti residuus invenitur $= a - p - \frac{p(a-p)}{a} = \frac{(a-p)^2}{a}$. Rursus detegitur sanguis vetus in fine tertii momenti superstes, si ex analogia $a : p :: \frac{(a-p)^2}{a} : \frac{p(a-p)^2}{a^2}$ eliciatur pars $\frac{p(a-p)^2}{a^2}$ veteris sanguinis in fine tertii momenti decedens, eaque dematur a Sanguine veteri $\frac{(a-p)^2}{a}$, unde oritur $\frac{(a-p)^2}{a} - \frac{p(a-p)^2}{a^2}$ $= \frac{(a-p)^3}{a^2}$. Sicque porro Sanguis vetus in fine quarti momenti reperitur $\frac{(a-p)^4}{a^3}$; ac denique Sanguis vetus in fine momenti n:^{mi}, seu integrae diei superstes prodibit $= \frac{(a-p)^n}{a^{n-1}} = a - np + \frac{n(n-1)}{2a} p^2$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3a^2}p^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4a^3}p^4$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4.5a^4}p^5 + \&c.$$ Quum autem in hujusmodi expressione coefficientium factores $n(n-1)(n-2)(n-3)$ - - - - abeant in $nnnn\ldots$, quandoquidem prae valore ipsius n infinito evanescunt numeri 1, 2, 3, &c.; propterea Sanguis vetus in fine unius diei superstes repraesentatur per formulam

$$a - np + \frac{n^2p^2}{2a} - \frac{n^3p^3}{2.3a^2} + \frac{n^4p^4}{2.3.4a^3} - \frac{n^5p^5}{2.3.4.5a^4} + \&c. = a - b + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^3}{2.3a^2} + \frac{b^4}{2.3.4a^3} - \frac{b^5}{2.3.4.5a^4} + \&c.$$

Atque hinc liquet, quam parum veritati consonum sit illud Keillianae hypothesis consectarium, quo sanguis vetus in fine primae diei residuus ponitur $= a - b$. Ut modo inveniatur, quot diebus perficiatur sanguinis instauratio, ita ut nimirum sanguis vetus in corpore residuus quantitatem valde parvam ω adaequet, voco x numerum dierum quaesitum, ac protinus nanciscor $\frac{(a-p)^{nx}}{a^{nx-1}} = \omega$, seu $\left(\frac{a-p}{a}\right)^{nx} = \frac{\omega}{a}$; hinc habeo $x\ log.\left(\frac{a-p}{a}\right)^n$

$= log.\ \omega - log.\ a$, sive $x\ log.\left(1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{b^3}{6a^3} + \frac{b^4}{24a^4} - \frac{b^5}{120a^5} + \&c.\right) = log.\ \omega - log.\ a$; & consequenter

$$x = \frac{log.\ \omega - log.\ a}{log.\left(1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{b^3}{6a^3} + \frac{b^4}{24a^4} - \&c.\right)}$$

Sit igitur juxta assumpta Keilliana $a = 20$ libr., $b = 4$ libr., $\omega = 0,0247$ libr., eritque $log.\ \omega - log.\ a = -1,6073030 - 1,3010300 = -2,9083330$, & $log.\left(1 - \frac{b}{a} + \&c.\right) = log.\left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{50} - \frac{1}{750} + \frac{1}{15000}\right)$ satis proxime, seu $= log.\ \frac{12281}{15000} = -0,0868576$. Quamobrem reperitur $x = \frac{-2,9083330}{-0,0868576} = \frac{29083330}{868576} = 33\frac{1}{2}$ diebus circiter, seu tribus diebus cum dimidio plus quam a KEILLIO proponitur. Idem invenitur brevius hoc pacto: Constat, logarithmum hyperbolicum quantitatis $1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{b^3}{6a^3} + \frac{b^4}{24a^4} - \&c.$ esse $-\frac{b}{a}$, & logarithmum Tabularem, seu Briggianum aequari hyperbolico diviso per 2, 302585; hinc prodibit

$$log.\left(1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{2a^2}-\&c.\right)=-\frac{b}{2,302585a}$$

$$=-\frac{1}{11,512925}=-0,08685;$$ atque ideo $x=33\frac{1}{7}$ diebus.

4. Ponatur præterea cum KEILLIO totum corpus libras 160 ponderare, & quaeratur quantum veteris corporis exacto demum anno relinquatur, si quotidianus partium fluidarum solidarumque interitus quatuor librarum assumatur. Ex superiori formula deducitur illico $log.\,\omega = x\,log.\left(1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{2a^2}-\&c.\right)+log.\,a$, & capto $x=365$ diebus, $a=160$ libr., $b=4$ libr. oritur $log.\,\omega=-\frac{365b}{2,302585a}+2,20412=-3,9629373+2,20412=-1,7588173$; proindeque $\omega=0,01742$ libr; quod iterum differt a Keilliano.

SCHOLION I.

5. Mira prorsus est hujus Problematis cognatio & affinitas cum Problemate *anticipationis*, seu pecuniae in antecessum numeratae: quaeritur ibi quantum datae summae vel sortis a post annum elapsum relinquatur, si assumpto annuo ipsius foenore b detrahatur a

sorte singulis momentis pars foenoris proportionalis; seu quod idem est, quantum Creditori debeatur, si numerata in antecessum pecunia ipse consentiat in compensationem singulis momentis faciendam partis proportionalis annuae usurae. Enimvero dispertito anno in infinitum momentorum numerum n, palam est, fore $\frac{b}{n}$ foenus primo momento respondens, & $a-\frac{b}{n}$ esse sortem elapso primo momento residuam. Porro si sors a primo momento foenus dat $\frac{b}{n}$, sors $a-\frac{b}{n}$ secundo momento foenus praebebit $\frac{\left(a-\frac{b}{n}\right)\frac{b}{n}}{a}$, quod a sorte $a-\frac{b}{n}$ subtractum relinquit $a-\frac{b}{n}-\frac{\left(a-\frac{b}{n}\right)\frac{b}{n}}{a}$

$$=\frac{\left(a-\frac{b}{n}\right)^2}{a}$$ sorti elapso secundo momento residuae.

Instituta rursus analogia $a:\frac{b}{n}::\frac{\left(a-\frac{b}{n}\right)^2}{a}:\frac{\left(a-\frac{b}{n}\right)^2\frac{b}{n}}{a^2}$, quartus proportionalis $\frac{\left(a-\frac{b}{n}\right)^2\frac{b}{n}}{a^2}$ usuram exprimit tertio momento caducam, & $\frac{\left(a-\frac{b}{n}\right)^2}{a} - \frac{\left(a-\frac{b}{n}\right)^2 \frac{b}{n}}{a^2}$ $= \frac{\left(a-\frac{b}{n}\right)^3}{a^2}$ sortem repraesentat exacto tertio momento superstitem: sicque porro exacto momento n: esimo seu anno integro invenietur sors reliqua $= \frac{\left(a-\frac{b}{n}\right)^n}{a^{n-1}}$. Evoluta hac quantitate invenitur $a - b + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^3}{6a^2} + \frac{b^4}{24a^3} - \frac{b^5}{120a^4} +$ &c. habita scilicet ratione valoris infiniti n, prae quo in factore quolibet $n-1$, $n-2$, $n-3$, &c. evanescunt numeri -1, -2, -3, &c. Est autem haec formula plane eadem, quam supra pro sanguinis renovatione deteximus, & formulae valor nihil aliud est nisi factum ex quantitate a in numerum, cujus logarithmus hyperbolicus est $-\frac{b}{a}$.

6. Haud dissimili ratiocinatione ostendi potest decantatum Problema, a Jac. BERNOULLIO in Actis Lipsiensibus propositum, & suppressa demonstratione solutum. Problema Bernoullianis verbis expressum tale est:

Quaeritur si Creditor aliquis pecuniam foenori exponat ea lege, ut singulis momentis pars proportionalis usurae annuae sorti annumeretur, quantum ipsi finito anno debeatur. Ait Bernoullius pecuniam elapso anno Creditori debitam aequari facto ex data sorte in numerum, cujus logarithmus hyperbolicus est ratio foenoris ad sortem.

7. Ad hoc demonstrandum dicatur a sors, b annua usura, n numerus momentorum infinitus in anno: erit $\frac{b}{n}$ usura primi momenti, & $a + \frac{b}{n}$ sors in fine illius momenti. Dic jam, si sors a momento primo foenus parit $\frac{b}{n}$, sors $a + \frac{b}{n}$ gignet momento secundo usuram $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)\frac{b}{n}}{a}$, quae praecedenti sorti $a + \frac{b}{n}$ annumerata sortem dat in fine secundi momenti $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)^2}{a}$.

Tertio momento, propter analogiam $a : \frac{b}{n} :: \frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)^2}{a} :$ $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)^2 \frac{b}{n}}{a^2}$, habetur foenus respondens $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)^2 \frac{b}{n}}{a^2}$, quod rursus sorti praecedenti adjunctum eandem reddit $= \frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)^3}{a^2}$. Atque ita invenitur sors in fine quarti momenti $= \frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)^4}{a^3}$, ac tandem momento n:esimo seu anni fine $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)^n}{a^{n-1}}$, nimirum $a + b + \frac{b^2}{2a} + \frac{b^3}{2.3a^2} + \frac{b^4}{2.3.4a^3} + \frac{b^5}{2.3.4.5a^4} + \frac{b^6}{2.3.4.5.6a^5} +$ &c., sive $a\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{2a^2} + \frac{b^3}{2.3a^3} + \frac{b^4}{2.3.4a^4} + \text{\&c.}\right)$. Jam vero ex hyperbolae quadratura perspectum est, quantitatem $1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{2a^2} + \frac{b^3}{2.3a^3} +$ &c. nihil aliud esse nisi numerum, cujus logarithmus hyperbolicus est $\frac{b}{a}$. Igitur pecunia finito anno Creditori debita aequatur facto ex pristina sorte a in numerum, cujus hyperbolicus logarithmus est ratio foenoris ad sortem.

SCHOLION II.

8. IN Bernoulliano Problemate sumitur $\frac{b}{n}$ pro primi momenti foenore, propterea quod ex Problematis praescripto *pars tempori proportionalis usurae annuae* accipienda est: at si in Problematibus ad compositum foenus, seu anatocismum spectantibus capienda esset momentanea sortis usura primo instanti respondens, ea inveniretur $= \frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}-1}} - a$; notum quippe est, in Problematibus hujusmodi sortem post datum quodlibet tempus t auctam exprimi semper per formulam $\frac{(a+b)^t}{a^{t-1}}$, ac proinde sortem, primo elapso momento $\frac{1}{n}$, evasuram $\frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}-1}}$, ideoque instantaneam primi momenti usuram fore $\frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}-1}} - a$. Explicata in seriem quantitate

$\frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}-1}}$ oritur infinitinomium $a+\frac{1}{n}b+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{b^2}{2a}$ $+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\frac{b^3}{2.3a^2}+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)\frac{b^4}{2.3.4a^3}+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)\left(\frac{1}{n}-4\right)\frac{b^5}{2.3.4.5a^4}+$ &c.

Porro in hoc infinitinomio factores $\frac{1}{n}-1$, $\frac{1}{n}-2$, $\frac{1}{n}-3$, &c. ob evanescentem ipsius $\frac{1}{n}$ valorem, degenerant in -1, -2, -3, $-$ &c. Igitur infinitinomium abit in $a+\frac{b}{n}-\frac{b^2}{2na}+\frac{b^3}{3na^2}-\frac{b^4}{4na^3}+\frac{b^5}{5na^4}-$ &c. $=a+\frac{1}{n}\left(b-\frac{b^2}{2a}+\frac{b^3}{3a^2}-\frac{b^4}{4a^3}+\frac{b^5}{5a^4}-\text{&c.}\right)$.

Hinc consequens est, instantaneum foenus $\frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}-1}}-a$ nancisci formam $\frac{1}{n}\left(b-\frac{b^2}{2a}+\frac{b^3}{3a^2}-\frac{b^4}{4a^3}+\frac{b^5}{5a^4}-\frac{b^6}{6a^5}+\text{&c.}\right)$, sive etiam $\frac{1}{n}a\left(\frac{b}{a}-\frac{b^2}{2a^2}\right.$

$\left.+\frac{b^3}{3a^3}-\frac{b^4}{4a^4}+\frac{b^5}{5a^5}-\text{&c.}\right)$ Est autem ex logarithmorum doctrina exploratum, quantitatem $\frac{b}{a}-\frac{b^2}{2a^2}+\frac{b^3}{3a^3}-\frac{b^4}{4a^4}$ $+$ &c. esse logarithmum hyperbolicum numeri $1+\frac{b}{a}$. Igitur accepto hic symbolo log. ad logarithmum non Briggianum, sed hyperbolicum designandum reperitur usura primo instanti respondens $=\frac{1}{n}\,a\,log.\left(1+\frac{b}{a}\right)$, vel $=a\,dt\,log.\left(1+\frac{b}{a}\right)$, si loco $\frac{1}{n}$ substituatur temporis t differentiale.

9. Si quis integrata expressione differentiali $a\,dt\,log.\left(1+\frac{b}{a}\right)$, inventoque integrali $at\,log.\left(1+\frac{b}{a}\right)$, contenderet, integrale istud aequari usurae, quae respondet tempori indeterminato t, in fallaciam impingeret quo magis subtilem & latentem, eo sollertius cavendam. Et sane integrale quantitatis $a\,dt\,log.\left(1+\frac{b}{a}\right)$ nihil aliud potest exprimere nisi summam omnium $a\,dt\,log.\left(1+\frac{b}{a}\right)$ in hypothesi, quod singulis momentis foenus instantaneum sit semper idem, nem-

pe $a\,dt\,log.\left(1+\frac{b}{a}\right)$, vel huic aequale $\frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{\frac{\frac{1}{n}-1}{a}}-a$; in qua certe hypothesi usura tempore indeterminato t parta evadit $at\,log.\left(1+\frac{b}{a}\right)$, & posito $t=1$ anno, fit illa $=a\,log.\left(1+\frac{b}{a}\right)$, quod etiam invenitur ducto foenore instantaneo constanti $\frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{\frac{\frac{1}{n}-1}{a}}-a$ in momentorum numerum n in anno t contentorum, unde habetur $\frac{n(a+b)^{\frac{1}{n}}}{\frac{\frac{1}{n}-1}{a}}-na$, hoc est

$$na\left(1+\frac{b}{na}+\tfrac{1}{n}\left(\tfrac{1}{n}-1\right)\frac{b^2}{2a^2}+\tfrac{1}{n}\left(\tfrac{1}{n}-1\right)\left(\tfrac{1}{n}-2\right)\frac{b^3}{2.3a^3}\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{n}\left(\tfrac{1}{n}-1\right)\left(\tfrac{1}{n}-2\right)\left(\tfrac{1}{n}-3\right)\frac{b^4}{2.3.4a^4}+\&c.\right)-na,$$

seu denique $a\left(\frac{b}{a}-\frac{b^2}{2a^2}+\frac{b^3}{3a^3}-\frac{b^4}{4a^4}+\frac{b^5}{5a^5}-\&c.\right)$, nimirum $a\,log.\left(1+\frac{b}{a}\right)$. Verum hypothesis, quod instantaneum foenus in quaestionibus ad anatocismum spectantibus constans & immutabile sit singulis quibusque

busque momentis, falsa est & absurda; quandoquidem singulis momentis foenus instantaneum variat, ac primo dumtaxat instante formam accipit $adt\,log.\left(1+\frac{b}{a}\right)$, caeteris autem omnibus aliam semper atque aliam. Propterea quantitas $adt\,log.\left(1+\frac{b}{a}\right)$ haudquaquam spectari potest veluti elementum foenoris una cum tempore t fluentis, neque proinde ejus integrale haberi potest pro foenore, quod indeterminato tempore t producatur.

10. Verum ac proprie dictum usurae una cum tempore t fluentis elementum invenitur hoc pacto: Exploratum est, sortem a tempore t evadere $a\left(1+\frac{b}{a}\right)^t$, & tempore $t+dt$, seu momento subsequenti fieri $a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{t+dt}$; igitur differentia inter sortes duas infinite propinquas, nimirum $a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{t+dt}-a\left(1+\frac{b}{a}\right)^t$ repraesentabit instantaneum foenus partum tempusculo infinitesimo dt post tempus quodvis indeterminatum t, quod equidem constituit verum ac proprie dictum foenoris elementum. Idemque reperi-

tur ope hujus analogiae, quemadmodum ſe habet ſors a ad foenus ſuum inſtantaneum momenti primi $a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{dt}-a$, ita ſe habet ſors $a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{t}$ poſt tempus indeterminatum t ad foenus ſuum inſtantaneum $a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{t+dt}-a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{t}$.

11. Nunc autem ſuſcepta integratione elementi $a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{t+dt}-a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{t}$ invenietur accurate foenus tempore quolibet indeterminato t productum. Etenim quantitas $a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{t+dt}-a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{t}$, ſeu $a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{t}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{dt}-a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{t}$, explicato binomio $\left(1+\frac{b}{a}\right)^{dt}$, deprehenditur $=a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{t}$ $\left(1+\frac{bdt}{a}+dt(dt-1)\frac{b^2}{2a^2}+dt(dt-1)(dt-2)\frac{b^3}{2.3a^3}\right.$ $\left.+\,dt\,(dt-1)\,(dt-2)\,(dt-3)\,\frac{b^4}{2.3.4a^4}+\text{\&c.}\right)$ $-a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{t}$. Porro in hac expreſſione factores $dt-1$, $dt-2$, $dt-3$, &c. evaneſcente dt mutantur in -1, -2, -3, &c. & proinde ipſa expreſſio degenerat in $a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{t}\left(1+\frac{bdt}{a}-\frac{b^2dt}{2a^2}\right.$ $\left.+\frac{b^3dt}{3a^3}-\frac{b^4dt}{4a^4}+\frac{b^5dt}{5a^5}-\text{\&c.}\right)-a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{t}$, hoc eſt in $a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{t}dt\left(\frac{b}{a}-\frac{b^2}{2a^2}+\frac{b^3}{3a^3}-\frac{b^4}{4a^4}\right.$ $\left.+\frac{b^5}{5a^5}-\frac{b^6}{6a^6}+\text{\&c.}\right)$, ſeu tandem in $a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{t}dt\,log.$ $\left(1+\frac{b}{a}\right)$. Conſtat autem ex quantitatum exponentialium integratione, eſſe

$$\int a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{t}dt\,log.\left(1+\frac{b}{a}\right)=a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{t}$$

$+$ conſt., & quum foenus temporis initio, ſeu evaneſcente t nullum ſit, fiet conſt. $=-a$; proindeque integrale completum $=a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{t}-a$, quod uſuram praebet tempori cuilibet indeterminato reſpondentem, & (poſito $t=1$ anno) uſuram dat b, quemadmodum oportet.

12. Caeterum quod perſpicue demonſtrat, a formula $\frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}-1}}-a$ rite repraeſentari inſtantaneum foenus primo momento caducum, eſt ſequens ratioci-

natio, cujus ope ab ipſo primi momenti foenore aſcendere licet gradatim uſque ad foenus annuum b. Sane, ſi fors a primo momento gignit uſuram $\frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}-1}} - a$, fors $a + \frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}-1}} - a$, ſeu $\frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}-1}}$ pariet ſecundo momento uſuram $\frac{(a+b)^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}-1}} - \frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}-1}}$, qua addita uſurae primi momenti oritur $\frac{(a+b)^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}-1}} - a$ pro uſura duobus primis momentis producta. Rurſus ſi fors a momento primo gignit foenus $\frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}-1}} - a$, fors $\frac{(a+b)^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}-1}}$ gignet momento tertio uſuram $\frac{(a+b)^{\frac{3}{n}}}{a^{\frac{3}{n}-1}} - \frac{(a+b)^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}-1}}$; hacque addita uſurae duorum praece-

dentium momentorum prodit uſura trium priorum momentorum $\frac{(a+b)^{\frac{3}{n}}}{a^{\frac{3}{n}-1}} - a$. Atque ita invenitur quatuor priorum momentorum uſura $= \frac{(a+b)^{\frac{4}{n}}}{a^{\frac{4}{n}-1}} - a$; ac denique momentorum omnium n annum integrum conſtituentium uſura $= \frac{(a+b)^{\frac{n}{n}}}{a^{\frac{n}{n}-1}} - a = a + b - a = b$, qualem eſſe oportet.

13. Neque aliter ex formula altera aequipollenti $\frac{1}{n} a \log. \left(1 + \frac{b}{a}\right)$ rite tractata reperitur. Et revera ſi a forte a provenit primo inſtanti uſura $\frac{1}{n} a \log. \left(1 + \frac{b}{a}\right)$, a forte $a + \frac{1}{n} a \log. \left(1 + \frac{b}{a}\right)$ proveniet ſecundo inſtanti foenus $\frac{1}{n} a \log. \left(1 + \frac{b}{a}\right) + \frac{1}{n^2} a \left(\log. (1 + \frac{b}{a})\right)^2$, quod ſi addatur foenori primi inſtantis, oritur foenus duorum inſtantium primorum $\frac{2}{n} a \log. \left(1 + \frac{b}{a}\right)$

$+\frac{1}{n^2}\, a\left(\log.\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^2 = a\left(1+\frac{1}{n}\log.\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^2$ $-\, a$. Rursus si sors a progignit primo instanti usuram $\frac{1}{n}\, a \log.\left(1+\frac{b}{a}\right)$, sors $a\left(1+\frac{1}{n}\log.\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^2$ duobus primis instantibus cumulata generat tertio instanti usuram $a\left(1+\frac{1}{n}\log.\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^2 \times \frac{1}{n}\log.\left(1+\frac{b}{a}\right)$. Hac collecta in unam summam cum usura duorum instantium praecedentium, prodit usura trium priorum instantium $= a\left(1+\frac{1}{n}\log.\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^3 - a$. Eodemque modo invenitur usura quatuor priorum instantium $= a\left(1+\frac{1}{n}\log.\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^4 - a$, ac demum usura instantibus omnibus n progenita $= a\left(1+\frac{1}{n}\log.\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^n - a$. Explicata porro in seriem potestate $\left(1+\frac{1}{n}\log.\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^n$, & in termini cujusvis coefficiente contemptis numeris prae infinito n evanescentibus, oritur ipsa potestas $= 1+\log.\left(1+\frac{b}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\log.\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^2$

$+\frac{1}{2.3}\left(\log.\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^3+\frac{1}{2.3.4}\left(\log.\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^4+\&c.$, quae expressio ex logarithmorum hyperbolicorum doctrina aequatur numero, cujus hyperbolicus logarithmus est ipse secundus seriei terminus $\log.\left(1+\frac{b}{a}\right)$; proindeque fit series ipsa $= 1+\frac{b}{a}$. Quare usura primo anno parta $a\left(1+\frac{1}{n}\log.\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^n - a$ invenitur $= a\left(1+\frac{b}{a}\right)-a = b$, sicuti expectabatur.

14. Haud inutile erit animadvertere, differentiale foenoris tempore quovis cumulati idem penitus esse ac differentiale sortis eidem tempori respondentis. Nam sors post datum quodlibet tempus t fit, uti palam est, $a\left(1+\frac{b}{a}\right)^t$, & post tempus proxime sequens $t+dt$ ea evadit $a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{t+dt}$: quamobrem ejus differentiale erit differentia sortis ipsius in duobus statibus infinite proximis consideratae, hoc est fiet ejus differentiale $= a\left(1+\frac{b}{a}\right)^{t+dt} - a\left(1+\frac{b}{a}\right)^t$

$= a\left(1+\frac{b}{a}\right)^t dt \log.\left(1+\frac{b}{a}\right)$, quemadmodum foenoris. Neque id mirum videri debet, quum expressio sortis $a\left(1+\frac{b}{a}\right)^t$ non discrepet ab expressione foenoris $a\left(1+\frac{b}{a}\right)^t - a$ nisi constanti quantitate a, exploratumque alias sit binarum variabilium constanti quantitate inter se differentium eamdem esse fluxionem, seu idem elementum aut differentiale.

DISQUISITIO IV.

DE INSIGNIBUS QUIBUSDAM MOTUS VERTICALIS PROPRIETATIBUS IN CORPORIBUS ASCENDENTIBUS ET LIBERE DESCENDENTIBUS.

1. INter Auctores quamplurimos, qui de Corporum Motibus magna ingenii dexteritate disseruerunt, atque hanc utiliorem praestantioremque Mechanicae partem scriptis editis illustrarunt, nemo, quod sciam, data opera inquisivit in singulares quasdam ac prope admirandas Motus Verticalis affectiones in illis corporibus, quae verticaliter sursum dato impetu projiciuntur libereque deorsum labuntur, in eaque vis centralis, seu gravitatis terrestris hypothesi, quam non imaginatio sibi fingit, sed natura ipsa postulat, experimenta confirmant, Coelumque ipsum, si ita loqui fas est, Terra, ac NEWTONUS demonstrant. Hanc quidem Naturae hypothesim de vi centrali quadratis distantiarum a centro reciproce proportionali excoluit in elegantissimo Opusculo *De Corporum Motu Rectilineo, & Curvilineo*

in Mediis non resistentibus §. 48. Coelestinus ROLLIUS; praecipua rectilinei motus symptomata in hac assumptione virium evolvens; sed admirabiliores affectiones silentio praeteriit, motumque dumtaxat corporum sponte descendentium investigavit, & analysi denique vix delibata longiorem molestioremque synthesis rationem persequi maluit. Constitui itaque singularia isthaec Verticalis Motus symptomata scrutari, eaque per breviorem severioremque Analyseos viam diligenter evolvere atque explicare.

2. Projiciatur grave verticaliter sursum dato impetu vel celeritate c in hypothesi gravitatis terrestris decrescentis in ratione duplicata inversa distantiarum a Terrae centro, in vera nimirum Naturae hypothesi, qualem terrestria coelestiaque phoenomena certo suadent & apprime demonstrant. Sit Terrae semidiameter r; altitudo, ad quam grave pervenit tempore t, velocitate v, sit x, gravitas demum acceleratrix in terrestri superficie dicatur g. Jamvero, quoniam est ex hypothesi vis acceleratrix uti reciproce quadratum distantiae a Terrae centro, erit iccirco $(r+x)^2 : r^2 ::$ $g : \frac{gr^2}{(r+x)^2} =$ vi acceleratrici gravitatis in altitudine x supra Telluris superficiem. Notum porro est ex Mechanicis, vim ductam in tempusculum aequari extincto elemento velocitatis; propterea fiet $\frac{gr^2 dt}{(r+x)^2} = -dv$. Quocirca ob $dt = \frac{dx}{v}$, obtinebitur $\frac{gr^2 dx}{(r+x)^2} = -vdv$; atque adeo $\int \frac{gr^2 dx}{(r+x)^2} = \int -vdv$, seu $\frac{gr^2}{r+x}$ $= \frac{1}{2} v^2 +$ Const. Invenitur autem Const. $= gr - \frac{1}{2} c^2$ eo quod initio motus existente $x = 0$, evadit $v = c$. Igitur nanciscimur $\frac{1}{2} v^2 = \frac{gr^2}{r+x} - gr + \frac{1}{2} c^2$, seu v $= \sqrt{\left(c^2 - \frac{2grx}{r+x}\right)}$.

3. Evidens jam est ex hac aequatione $v = \sqrt{\left(c^2 - \frac{2grx}{r+x}\right)}$, in corporibus sursum projectis aliquam semper superesse velocitatem residuam v post emensam altitudinem x quotiescumque fuerit $c^2 > \frac{2grx}{r+x}$, sive $x < \frac{c^2 r}{2gr - c^2}$; ita ut si initialis velocitas c designet spatium motu aequabili describendum a corpore unius secundi tempore, & vis gravitatis acceleratrix g in superficie terrestri spatium designet, quod unius pariter secundi tempore corpus percurreret uniformi motu ex ipsius gravitatis g actione, spatium videlicet pe-

dum pariſienſium 30, 2, remanere debeat in corpore aſcendente velocitas aliqua v quoties habeatur $c^2 > \frac{60,4rx}{r+x}$, ſive $x < \frac{c^2 r}{60,4r+c^2}$, hoc eſt (ſumpta ſemidiametro terreſtri r pedum pariſienſ. 19741200) $c^2 > \frac{1192368480x}{19741200+x}$ vel $x > \frac{19741200\, c^2}{1192368480-c^2}$. Tota vero aſcendentis corporis extinguetur velocitas impreſſa ubi fuerit $c^2 = \frac{2\,grx}{r+x} = \frac{1192368480\, x}{19741200+x}$, vel $x = \frac{c^2 r}{2\,gr-c^2} = \frac{19741200\, c^2}{1192368480-c^2}$.

4. Reſidua corporis ſurſum projecti celeritas v invenitur imaginaria aut abſurda quotieſcumque $c^2 > \frac{2\,grx}{r+x}$, vel $x > \frac{c^2 r}{2gr-c^2}$; quod ſane indicat, altitudinem x acceptam fuiſſe juſto majorem, ad quam nimirum projectum non pertingit. Capta vero altitudine x infinita, reperitur reſidua velocitas v ſemper repugnans quoties fuerit $c^2 < 2\,gr. < 1192368480$ ped.; ſed ſumpta c^2 vel $=$, vel $>$ 1192368480 ped., ſive $c =$, aut $>$ 34530, 69 ped., velocitas reſidua v invenitur realis, videlicet aut nulla aut poſitiva, infinita licet exiſtente altitudine, ad quam corpus debet eniti.

5. En igitur Theorema prorſus mirificum & ſingulare: *Datur velocitas finita, eaque arctis limitibus circumſcripta, & ipſa celeritate luminis immaniter minor, quacum ſi grave corpus ſurſum projiciatur, ſublata medii reſiſtentia, veraque admiſſa gravitatis decreſcentis hypotheſi in ratione duplicata inverſa diſtantiarum a Terrae centro, idem perveniret ad altitudinem infinitam, ſeu qualibet data & aſſignabili majorem.* Haec autem velocitas talis eſt, ut corpus ab ipſa animatum pedes tantum 34531 ſingulis ſecundis aequabiliter conficeret. Sane in formula $v = \sqrt{\left(c^2 - \frac{2\,gr\,x}{r+x}\right)}$, fit $v = 0$ quando $c = \sqrt{\frac{2\,gr\,x}{r+x}}$, hoc eſt (facta $x = \infty$) quando $c = \sqrt{2\,gr} = 34531$. Hinc proponi poteſt hoc elegantiſſimum Problema: *Invenire velocitatem projectionis, quae in gravi verticaliter aſcendente non pereat niſi poſt emenſum ſpatium infinitum in vera hypotheſi gravitatis decreſcentis* &c. Reperietur hujuſmodi celeritas qualis modo definita fuit, nimirum nec immenſa nec ultra modum ingens.

6. Sed proprietatem adeo inſignem & inexpectatam juvat aliter demonſtrare: Labatur grave corpus ab altitudine ſemidiametrorum terreſtrium n facta computatione ab ipſo terrae centro; eritque $\frac{gr^2\,dx}{(nr-x)^2}$

$= udu$, dicta x altitudine descendendo percursa, u velocitate illo descensu acquisita. Quare $\int \frac{gr^2 dx}{(nr-x)^2} = \int udu$, seu $\frac{gr^2}{nr-x} = \frac{1}{2}u^2 + \text{Const.} = \frac{1}{2}u^2 + \frac{gr}{n}$. Igitur in fine lapsus, quando nempe corpus telluris superficiem attigit, ubi $x = (n-1)r$, evadit $u^2 = 2gr - \frac{2gr}{n}$. Sit modo $n = \infty$, cadat scilicet corpus ab infinita altitudine, seu semidiametris terrestribus numero infinitis aequali, & orietur $u^2 = 2gr$, sive $u = \sqrt{2gr} = 34531$ ped. Quapropter corpus ex infinita lapsum altitudine, & telluris superficiem jam attingens acquirit velocitatem dumtaxat finitam, videlicet velocitatem pedum tantummodo 34531 singulis secundis. Igitur e contrario corpus hac ipsa finita velocitate sursum emissum ad altitudinem pervenit infinitam.

7. Alia insignis motuum istiusmodi proprietas ita se habet: *Si initialis velocitas* c, *corpori sursum projecto impressa, infinita fuerit, ea post emensam a corpore altitudinem infinitam non modo non extinguitur, vel convertitur in velocitatem finitam, sed adhuc perseverat infinita, nec ab ipsa initiali diversa*. Id liquet ex superiori formula $v = \sqrt{\left(c^2 - \frac{2grx}{r+x}\right)}$, quae assumptis x, & c infinitis mutatur in $\sqrt{(c^2 - 2gr)} = c - \frac{gr}{c} - \frac{g^2r^2}{2c^3} - \frac{g^3r^3}{2c^5} - \frac{5g^4r^4}{8c^7} - \text{\&c.}$; quae quidem series non differt a primo termino c in hac hypothesi ipsius $c = \infty$.

8. Pergo modo, & quaero tempus t per functionem velocitatis v repraesentatum, in corporibus ascendentibus. Ex formula $v = \sqrt{\left(c^2 - \frac{2grx}{r+x}\right)}$ infero $x = \frac{c^2r - rv^2}{2gr - c^2 + v^2}$, & facta differentiatione elicio $dx = -\frac{4gr^2 vdv}{(2gr - c^2 + v^2)^2}$; atque inde $dt = \frac{dx}{v} = -\frac{4gr^2 dv}{(2gr - c^2 + v^2)^2}$. Jamvero hujus quantitatis integrale ita exquiro: Pono $\int -\frac{4gr^2 dv}{(2gr - c^2 + v^2)^2} = \frac{Av + B}{2gr - c^2 + v^2} - \int \frac{4gr^2 D dv}{2gr - c^2 + v^2}$, ac sumo differentialia, habeoque $-\frac{4gr^2 dv}{(2gr - c^2 + v^2)^2}$

$$= \frac{(2gr - c^2) Adv - Av^2dv - 2Bvdv}{(2gr - c^2 + v^2)^2} - \frac{4gr^2 D dv}{2gr - c^2 + v^2}.$$

Hinc reductione terminorum facta ad eundem Denominatorem consequor hanc aequationem

$$\begin{array}{llrl} -\ Av^2 & -2Bv & + & 2grA \\ -4gr^2Dv^2 & & - & c^2A \\ & & - & 8g^2r^2D = 0 \\ & & + & 4gr^2c^2D \\ & & + & 4gr^2 \end{array}$$

Ex hac hac vero sequentes nanciscor aequalitates $A + 4gr^2D = 0$, $2B = 0$, $2grA - c^2A - 8g^2r^2D + 4gr^2c^2D + 4gr^2 = 0$ Propterea fit $A = -\frac{2gr^2}{2gr - c^2}$, $B = 0$, $D = \frac{1}{4gr - 2c^2}$. Igitur

$$S - \frac{4gr^2\,dv}{(2gr - c^2 + v^2)^2} = -\frac{2gr^2 v}{(2gr - c^2)(2gr - c^2 + v^2)} - S\frac{2gr^2\,dv}{(2gr - c^2)(2gr - c^2 + v^2)}.$$

Liquet porro, expressionem $S\frac{2gr^2\,dv}{(2gr - c^2)(2gr - c^2 + v^2)}$ in hypothesi $2gr > c^2$ aequalem esse quantitati $\frac{2gr^2}{(2gr - c^2)^2}$ ductae in arcum circuli, cujus radius est $\sqrt{(2gr - c^2)}$, tangens $= v$, vel etiam aequalem quantitati $\frac{2gr^2}{(2gr - c^2)^{\frac{3}{2}}}$, multiplicatae per arcum circuli, cujus semidiameter est $= 1$, tangens $= \frac{v}{\sqrt{(2gr - c^2)}}$. Habebitur itaque

$$S - \frac{4gr^2\,dv}{(2gr - c^2 + v^2)^2} = -\frac{2gr^2 v}{(2gr - c^2)(2gr - c^2 + v^2)} - \frac{2gr^2}{(2gr - c^2)^{\frac{3}{2}}} \times Arc.\ tang.\ \frac{v}{\sqrt{(2gr - c^2)}}$$

$+$ Const. $= t$. Quum autem motus initio, seu assumpto $t = 0$ evadat $v = c$, invenitur Const. $= \frac{rc}{2gr - c^2} + \frac{2gr^2}{(2gr - c^2)^{\frac{3}{2}}} \times Arc.\,tang.\,\frac{c}{\sqrt{(2gr - c^2)}}$.

Quare postremo nanciscimur $t = \frac{rc}{2gr - c^2} - \frac{2gr^2 v}{(2gr - c^2)(2gr - c^2 + v^2)} + \frac{2gr^2}{(2gr - c^2)^{\frac{3}{2}}} \left(Arc.\ tang.\ \frac{c}{\sqrt{(2gr - c^2)}} - Arc.\,tang.\,\frac{v}{\sqrt{(2gr - c^2)}}\right)$; & quoniam datis duobus arcubus φ, λ est $tang.\ (\varphi - \lambda) = \frac{tang.\ \varphi - tang.\ \lambda}{1 + tang.\,\varphi\ tang.\,\lambda}$, erit denique t

$$= \frac{rc}{2gr - c^2} - \frac{2gr^2 v}{(2gr - c^2)(2gr - c^2 + v^2)} + \frac{2gr^2}{(2gr - c^2)^{\frac{3}{2}}} \times Arc.\ tang.\ \frac{(c - v)\sqrt{(2gr - c^2)}}{2gr - c^2 + cv}.$$

9. Si jam velocitas initialis c, ascendenti corpori communicata, fuerit $= \sqrt{2gr} = 34531$ ped. unius secundi tempore, facile ostendimus, velocitatem ipsam

non perire nisi post elapsum tempus infinitum. In hac enim hypothesi aequatio differentialis $dt = -\frac{4gr^2\,dv}{(2gr - c^2 + v^2)^2}$ mutatur in $-\frac{4gr^2\,dv}{v^4}$; atque hinc eruitur $t = \frac{4gr^2}{3v^3} - \frac{4gr^2}{3c^3}$. Proinde sumpto $v = 0$ oritur $t = \infty$. Quapropter *si corpori sursum projecto velocitas imprimatur finita, nec admodum ingens, pedum nempe* 34531. *singulis secundis, ea non extinguitur nisi post infinitum tempus, & corpus pergit semper ascendere contra gravitatis directionem, quin unquam ad quietem redigatur.*

10. Fingamus nunc, velocitatem initialem c majorem quam $\sqrt{2gr}$; inveniemus, expressionem temporis t §. 8. imaginariam esse; quod quidem nos docet, formulae $\int -\frac{4gr^2\,dv}{(2gr - c^2 + v^2)^2}$ integrale aliunde quam a circuli rectificatione pendere: & revera exploratum alias est, differentialem formulam $-\frac{4gr^2\,dv}{(2gr - c^2 + v^2)^2}$ in hypothesi $c^2 > 2gr$ per hyperbolae quadraturam integrari. Itaque fiat $c^2 - 2gr = h^2$, eritque $dt = -\frac{4gr^2\,dv}{(v^2 - h^2)^2} = -\frac{4gr^2\,dv}{(v+h)^2(v-h)^2}$.

Capio igitur $-\frac{4gr^2\,dv}{(v^2 - h^2)^2} = \frac{Av\,dv + B\,dv}{(v+h)^2} + \frac{Cv\,dv + D\,dv}{(v-h)^2}$; terminos redigo ad eundem denominatorem, & aequationem nanciscor

$$\begin{array}{l} Av^3 - 2hAv^2 + h^2Av + h^2B \\ + Cv^3 + Bv^2 - 2hBv + h^2D = 0. \\ \quad + 2hCv^2 + h^2Cv + 4gr^2 \\ \quad + Dv^2 + 2hDv \end{array}$$

Ex hac vero sequentes deducuntur aequalitates

$$A + C \ldots\ldots\ldots = 0;$$
$$-2hA + B + 2hC + D = 0;$$
$$h^2A - 2hB + h^2C + 2hD = 0;$$
$$h^2B + h^2D + 4gr^2 \ldots = 0;$$

atque inde infertur

$$A \ldots = -\frac{gr^2}{h^3};$$
$$B \ldots = -\frac{2gr^2}{h^2};$$
$$C \ldots = \frac{gr^2}{h^3};$$
$$D \ldots = -\frac{2gr^2}{h^2}.$$

Quamobrem $-\frac{4gr^2\,dv}{(v^2-h^2)^2} = -\frac{gr^2\,vdv}{h^3(v+h)^2}$ $+\frac{gr^2\,vdv}{h^3(v-h)^2} - \frac{2gr^2\,dv}{h^2(v+h)^2} - \frac{2gr^2\,dv}{h^2(v-h)^2}$.

Nunc autem protinus invenitur

$\int -\frac{gr^2\,vdv}{h^3(v+h)^2} = -\frac{gr^2}{h^2(v+h)} - \frac{gr^2}{h^3}\times$ $\log.(v+h)$; $\int \frac{gr^2\,vdv}{h^3(v-h)^2} = -\frac{gr^2}{h^2(v-h)} + \frac{gr^2}{h^3}\times$ $\log.(v-h)$; $\int -\frac{2gr^2\,dv}{h^2(v+h)^2} = \frac{2gr^2}{h^2(v+h)}$; $\int -\frac{2gr^2\,dv}{h^2(v-h)^2} = \frac{2gr^2}{h^2(v-h)}$. Igitur t $= \int -\frac{4gr^2\,dv}{(v^2-h^2)^2} = \frac{gr^2}{h^2(v+h)} + \frac{gr^2}{h^2(v-h)}$ $+\frac{gr^2}{h^3}\log.\frac{v-h}{v+h}$ + Conſt. $= \frac{2gr^2\,v}{h^2(v^2-h^2)} + \frac{gr^2}{h^3}\times$ $\log.\frac{v-h}{v+h}$ + Conſt. Porro initio motus, ſeu evaneſcente t, abit v in c; proinde fit Conſt. $= -\frac{rc}{h^2}$ $-\frac{gr^2}{h^3}\log.\frac{c-h}{c+h}$; adeoque tandem $t = \frac{2gr^2\,v}{h^2(v^2-h^2)}$

$-\frac{rc}{h^2} + \frac{gr^2}{h^3}\log.\frac{(v-h)(c+h)}{(v+h)(c-h)}$.

11. Inventa expreſſione temporis per velocitatem, reſtat nunc ut tempus ipſum per ſpatii functionem repraeſentatum detegamus. Itaque formula §. 2. $v = \sqrt{\left(c^2 - \frac{2grx}{r+x}\right)}$ mutetur primo in $v = \sqrt{\frac{c^2x - 2grx + c^2r}{r+x}}$; tum ob $dt = \frac{dx}{v}$ obveniet $dt = dx\sqrt{\frac{r+x}{c^2x-2grx+rc^2}}$ $= dx\sqrt{\frac{r+x}{h^2x+rc^2}}$. Ut integratio abſolvatur, fiat $\sqrt{\frac{r+x}{h^2x+rc^2}} = z$, eritque $dx = \frac{(2rc^2-2rh^2)\,z\,dz}{(h^2z^2-1)^2}$, adeoque $dt = \frac{(2rc^2-2rh^2)\,z^2dz}{(h^2z^2-1)^2} = \frac{2rc^2-2rh^2}{h^4}\times$ $\frac{z^2dz}{(z^2-\frac{1}{h^2})^2} = \frac{2rc^2-2rh^2}{h^4}\times\frac{z^2\,dz}{(z-\frac{1}{h})^2(z+\frac{1}{h})^2}$. Ut hujus quantitatis integrale eliciatur, pono

$$\frac{z^2\,dz}{(z-\frac{1}{h})^2(z+\frac{1}{h})^2} = \frac{Azdz+Bdz}{(z+\frac{1}{h})^2} + \frac{Czdz+Ddz}{(z-\frac{1}{h})^2},$$

revocatisque fractionibus ad eundem denominatorem aequationem sequentem consequor

$$
\left.\begin{aligned}
& A\zeta^3 - \frac{2A\zeta^2}{h} + \frac{A\zeta}{h^2} + \frac{B}{h^2} \\
& + C\zeta^3 + B\zeta^2 - \frac{2B\zeta}{h} + \frac{D}{h^2} \\
& + \frac{2C\zeta^2}{h} + \frac{C\zeta}{h^2} \\
& + D\zeta^2 + \frac{2D\zeta}{h} \\
& - \zeta^2
\end{aligned}\right\} = 0.
$$

Ex hac porro deducuntur aequalitates

$$A + C \ldots\ldots\ldots\ldots = 0;$$

$$-\frac{2A}{h} + B + \frac{2C}{h} + D - 1 = 0;$$

$$\frac{A}{h^2} - \frac{2B}{h} + \frac{C}{h^2} + \frac{2D}{h} \ldots = 0;$$

$$\frac{B}{h^2} + \frac{D}{h^2} \ldots\ldots\ldots\ldots = 0:$$

Hinc invenitur

$$A \ldots\ldots = -\tfrac{1}{4}h;$$
$$B \ldots\ldots = 0;$$
$$C \ldots\ldots = \tfrac{1}{4}h;$$
$$D \ldots\ldots = 0.$$

Igitur

$$dt = \frac{(2rc^2 - 2h^2r)\zeta^2 d\zeta}{h^4(\zeta + \frac{1}{h})^2(\zeta - \frac{1}{h})^2} = -\frac{(rc^2 - rh^2)\zeta d\zeta}{2h^3(\zeta + \frac{1}{h})^2}$$

$$+ \frac{(rc^2 - rh^2)\zeta d\zeta}{2h^3(\zeta - \frac{1}{h})^2} = -\frac{gr^2\zeta d\zeta}{h^3(\zeta + \frac{1}{h})^2} + \frac{gr^2\zeta d\zeta}{h^3(\zeta - \frac{1}{h})^2}.$$

Jam vero est $\int - \frac{gr^2\zeta d\zeta}{h^3(\zeta + \frac{1}{h})^2} = -\frac{gr^2}{h^4(\zeta + \frac{1}{h})}$ $- \frac{gr^2}{h^3}\log.(\zeta + \frac{1}{h})$; & $\int \frac{gr^2\zeta d\zeta}{h^3(\zeta - \frac{1}{h})^2} = -\frac{gr^2}{h^4(\zeta - \frac{1}{h})}$ $+ \frac{gr^2}{h^3}\log.(\zeta - \frac{1}{h})$: iccirco erit $t = -\frac{2gr^2\zeta}{h^4(\zeta^2 - \frac{1}{h^2})}$ $+ \frac{gr^2}{h^3}\log.\frac{\zeta - \frac{1}{h}}{\zeta + \frac{1}{h}} + \text{Const.} = \frac{1}{h^2}\sqrt{(r+x)}$ $(h^2x + rc^2) + \frac{gr^2}{h^3}\log.\frac{\sqrt{(r+x)} - \frac{1}{h}\sqrt{(h^2x + rc^2)}}{\sqrt{(r+x)} + \frac{1}{h}\sqrt{(h^2x + rc^2)}}$ $+$ Const. Quum autem x evanescat una cum t, oritur inde Const. $= -\frac{rc}{h^2} - \frac{gr^2}{h^3}\log.\frac{h - c}{h + c}$; ac demum $t = \frac{1}{h^2}\sqrt{(r+x)(h^2x + rc^2)} - \frac{rc}{h^2} + \frac{gr^2}{h^3} \times$

$$\log.\frac{[h\sqrt{(r+x)}-\sqrt{(h^2x+rc^2)}\,](h+c)}{[h\sqrt{(r+x)}+\sqrt{(h^2x+rc^2)}\,](h-c)}.$$

12. Expendamus nunc paullo diligentius formul a superiorem §. 10., expressionem videlicet temporis per velocitatem, hoc est $t = \frac{2gr^2v}{h^2(v^2-h^2)} - \frac{rc}{h^2} + \frac{gr^2}{h^3}\log.\frac{(v-h)(c+h)}{(v+h)(c-h)}$, atque in anteceſſum animo reputemus, verſari nos jam in hypotheſi celeritatis initialis $c > \sqrt{2gr}$. Ponamus itaque, exceſſum ipſius c^2 ſupra $2gr$ eſſe $= \varphi^2$: hinc prodibit valor temporis $t = \frac{2gr^2v}{\varphi^2(v^2-\varphi^2)} - \frac{rc}{\varphi^2} + \frac{gr^2}{\varphi^3} \times \log.\frac{(v-\varphi)(c+\varphi)}{(v+\varphi)(c-\varphi)}$. Ex hoc autem temporis valore palam fit, capto $v > \varphi$ velocitatem aſcendenti corpori impreſſam decreſcere uſque ad valorem utcumque paullo majorem quam φ tempore ſemper finito ac determinato. At vero ſi accipiatur $v = \varphi$, invenitur $t = \frac{2gr^2\varphi}{0} + \frac{gr^2}{\varphi^3}\log. 0 = \infty$; conſtat enim $\log. 0$ infinitum eſſe negativum, ſed in immenſum minus

quam infinitum alterum $\frac{2gr^2\varphi}{0}$. En itaque mira atque inſignis Motuum iſtiuſmodi affectio: *Si corpori surſum emiſſo velocitas imprimatur major quam* $\sqrt{2gr}$, *ſeu major quam* 34531. *ped. pro ſingulis ſecundis, exceſſu exiſtente quolibet* k, *ea non decreſcet ad exceſſum uſque* k *niſi poſt tempus infinitum elapſum.*

13. Valor alter temporis t per ſpatii functionem expreſſus §. 11. praebet in hac hypotheſi, qua ſumitur $c^2 = 2gr + \varphi^2$, aequationem $t = \frac{1}{\varphi^2} \times \sqrt{(r+x)(\varphi^2x+rc^2)} - \frac{rc}{\varphi^2} + \frac{2gr^2}{\varphi^3} \times \log.\frac{[\varphi\sqrt{(r+x)}-\sqrt{(\varphi^2x+rc^2)}\,](\varphi+c)}{[\varphi\sqrt{(r+x)}+\sqrt{(\varphi^2x+rc^2)}\,](\varphi-c)}$. Hinc ergo aſſumpta altitudine x infinita reperitur $t = \frac{x}{\varphi} + \frac{2gr^2}{\varphi^3}\log. 0$; eſt autem $\log. 0$ infinitum negativum, ſed in immenſum minus quam infinitum $\frac{x}{\varphi}$, quemadmodum ex Infinitorum Geometria facile oſtenditur. Propterea elicitur $t = \infty$.

14. Si denique tum celeritas initialis c, tum altitudo x accipiatur infinita, exſurgit tempus t finitum; quum id autem non ſtatim appareat in praecedenti formula, ſic breviter oſtenditur: Quoniam ex hypotheſi $x = \infty$, & $c = \infty$, & praeterea $c = \sqrt{(\varphi^2 + 2gr)}$, erit etiam $\varphi = \infty$; hinc primus formulae terminus $\frac{1}{\varphi^2}\sqrt{(r+x)(\varphi^2 x + rc^2)}$ mutatur in $\frac{1}{\varphi^2}\sqrt{\varphi^2 x^2} = \frac{x}{\varphi}$, terminus ſecundus $-\frac{rc}{\varphi^2}$ convertitur in $-\frac{r}{\varphi}$, numerus vero logarithmi termini tertii numeratorem habet $[\varphi\sqrt{(r+x)} - \sqrt{(\varphi^2 x + rc^2)}](\varphi + c) = \left(\varphi\sqrt{(r+x)} - \sqrt{(\varphi^2 x + \varphi^2 r)} - \frac{gr^2}{\sqrt{(\varphi^2 x + rc^2)}}\right) \times 2\varphi = -2gr^2\sqrt{\frac{1}{x}}$, habetque denominatorem $[\varphi\sqrt{(r+x)} + \sqrt{(\varphi^2 x + rc^2)}](\varphi - c) = 2\varphi\sqrt{x}\left(\varphi\sqrt{r} - \varphi\sqrt{r} - \frac{gr}{\varphi}\right) = -2gr\sqrt{x}$, adeoque numerus ipſe eſt $= -\frac{2gr^2\sqrt{\frac{1}{x}}}{-2gr\sqrt{x}} = \frac{r}{x}$. Igitur

$t = \frac{x}{\varphi} - \frac{r}{\varphi} + \frac{gr^2}{\varphi^3}\log.\frac{r}{x}$, ſeu ob valores infiniteſimos $\frac{r}{\varphi}$, & $\frac{gr^2}{\varphi^3}\log.\frac{r}{x}$, remanet $t = \frac{x}{\varphi}$, quantitati nimirum finitae, ſiquidem x, & c ſeu φ valores habent infinitos ejuſdem ordinis.

15. Nunc operae pretium eſt ſelecto aliquo exemplo uſum formularum §. 10., & 11. illuſtrare. Petitur itaque tempus t, quo corpus ſurſum projectum velocitate $c = 2\sqrt{2gr}$, ſeu velocitate pedum paris. 69061, 378 ſingulis ſecundis ad ſexaginta ſemidiametrorum terreſtium altitudinem, ſeu ad Lunam uſque perveniret. Temporis expreſſio ſupra inventa dat $t = \frac{2gr^2 v}{h^2(v^2 - h^2)} - \frac{rc}{h^2} + \frac{gr^2}{h^3}\log.\frac{(v-h)(c+h)}{(v+h)(c-h)} = \frac{1}{h^2}\sqrt{(r+x)(h^2 x + rc^2)} - \frac{rc}{h^2} + \frac{gr^2}{h^3} \times \log.\frac{[h\sqrt{(r+x)} - \sqrt{(h^2 x + rc^2)}](h+c)}{[h\sqrt{(r+x)} + \sqrt{(h^2 x + rc^2)}](h-c)}$.

Est jam

$g =$	30, 2 ped.
$r =$	19741200
$gr =$	596184240
$c^2 = 8gr =$	4769473920
$c = 2\sqrt{2gr} =$	69061, 378
$h^2 = c^2 - 2gr =$	3577105440
$x = 60r =$	1184472000
$v^2 = c^2 - \frac{2grx}{r+x} =$	3596652464, 2623
$v = \sqrt{\left(c^2 - \frac{2grx}{r+x}\right)} =$	59972, 0974
$gr^2 v =$	705835142475168576211, 200
$\frac{1}{2} h^2 (v^2 - h^2) =$	3496088341224265 8, 456
$\frac{gr^2 v}{\frac{1}{2} h^2 (v^2 - h^2)} = \frac{2 gr^2 v}{h^2 (v^2 - h^2)} =$	20189, 28223

$- \frac{rc}{h^2} =$	$-$ 381, 13343

$\sqrt{(r+x)} =$	34701, 77517
$\sqrt{(h^2 x + rc^2)} =$	2081138239, 8289
$\sqrt{(r+x)(h^2 x + rc^2)} =$	72219191297746, 5584
$\frac{1}{h^2} \sqrt{(r+x)(h^2 x + rc^2)} =$	20189, 28223

$- \frac{rc}{h^2} =$	$-$ 381, 13343

$$h = \sqrt{(c^2 - 2gr)} = \quad 59808,\ 908$$

$$h^3 = \quad 213942770167259,\ 52$$

$$\frac{gr^2}{h^3} = \frac{11769392318688000}{213942770167259,\ 52} = \quad 55,\ 01187$$

$$v - h = \quad 163,\ 1894$$

$$c + h = \quad 128870,\ 2860$$

$$(v - h)(c + h) = \quad 21030264,\ 65016840$$

$$v + h = \quad 119781,\ 0054$$

$$c - h = \quad 9252,\ 470$$

$$(v + h)(c - h) = \quad 1108270159,\ 03333800$$

$$\frac{(v-h)(c+h)}{(v+h)(c-h)} = \quad 0,\ 018975754$$

$$log.\ tab.\ \frac{(v-h)(c+h)}{(v+h)(c-h)} = \quad -1,\ 721801$$

$$log.hyp.\frac{(v-h)(c+h)}{(v+h)(c-h)} = -1{,}721801 \times 2{,}302585 = -3{,}964593$$

$$\frac{gr^2}{h^3}\ log.\frac{(v-h)(c+h)}{(v+h)(c-h)} = 55{,}01187 \times -3{,}964593 = -218{,}09967$$

$$h\sqrt{(r+x)} = \quad 2075475278,\ 5792$$

$$\sqrt{(h^2x + rc^2)} = \quad 2081138239,\ 8289$$

$$h\sqrt{(r+x)} - \sqrt{(h^2x + rc^2)} = -5662961{,}2497$$

$$h + c = \quad 128870,\ 286$$

$$[h\sqrt{(r+x)} - \sqrt{(h^2x + rc^2)}](h + c) =$$

$$= \quad -729787435855,\ 7564142$$

$$h\sqrt{(r+x)} + \sqrt{(h^2x + rc^2)} = 4156613518{,}4081$$

$$h - c = \quad -9252,\ 470$$

$$[h\sqrt{(r+x)} + \sqrt{(h^2x + rc^2)}](h - c) =$$

$$= \quad -38458941880665,\ 3930070$$

$$\frac{[h\sqrt{(r+x)} - \sqrt{(h^2x + rc^2)}](h+c)}{[h\sqrt{(r+x)} + \sqrt{(h^2x + rc^2)}](h-c)} = A$$

$$= \frac{729787435855,\ 7564142}{38458941880665,\ 3930070} = 0,\ 018975754$$

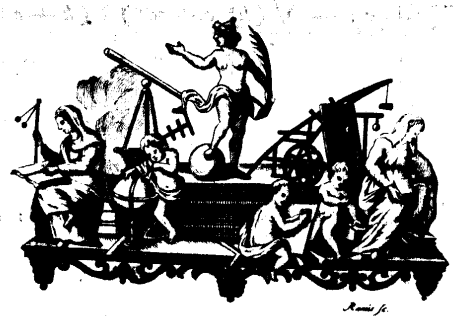
$$log.\ tab.\ A = \quad -1,\ 721801$$

$$log.hyp.A = -1{,}721801 \times 2{,}320585 = -3{,}964593$$

$$\frac{gr^2}{h^3} log.A = 55{,}01187 \times -3{,}964593 = -218{,}09967$$

Igitur oritur $t'' = 20189,\ 28223 - 381,\ 13343 - 218,\ 09967 = 19590,\ 0413'' = 5^h.\ 26'.\ 30''$ temporis ſiderei, ſeu $5^h.\ 24'.\ 52''$ temporis medii. Quare corpus celeritate pedum 69061, 378 pro unoquoque ſecundo ſurſum projectum, & a gravitate terreſtri decreſcente in ratione inverſa duplicata diſtantiarum jugiter retardatum horis 5, minutis 24, ſecundis 52 ad altitudinem ſexaginta ſemidiametrorum terreſtrium pertingit.

16. In hypotheſi gravitatis conſtantis, invenitur temporis expreſſio $t = \frac{c - v}{g} = \frac{c - \sqrt{(c^2 - 2gx)}}{g}$, quae factis ſubſtitutionibus exempli praecedentis apparet imaginaria: quod ſane indicat, corpus ea velocitate ſurſum emiſſum in hypotheſi gravitatis conſtantis non poſſe ad tantam altitudinem pervenire.



DISQUISITIO V.

De Sideribus intervallum inter datos duos Almicantarath interceptum velocissime trajicientibus, seu a data quamlibet altitudine ad aliam quamlibet datam tempore quamminimo pertingentibus.

1. IN Mathematicis inveſtigationibus aliquando, licet infrequenter experiuntur Geometrae, Syntheticam Methodum, hoc eſt Syntheſim Geometricam facilius ac tutius ad Problematis ſolutionem ducere quam ipſa Methodus Analytica, quae interdum per multiplices ſupputationum intricatiſſimarum moeandros id praeſtat, quod Syntheſis breviſſime & elegantiſſime abſolvit. At nihilominus nemo negaverit, directam regiamque viam, qua tendit Analyſis ad Verum ignotum aſſequendum, viae indirectae & obliquae, cui Syntheſis inhae-

ret, longe esse anteponendam. Insignis certe Geometra Condorcetus *tom. III. Supplém. à l' Encyclopéd. Art. Méthode* non dubitat affirmare : *Les opérations de la Synthese sont plus compliquées, sa marche plus difficile à suivre, ses résultats moins généraux. Elle demanderoit pour bien des problêmes un travail impraticable : aussi a-t-elle été abandonée de presque tous le Géometres, & elle n' a plus pour elle que le nom de NEWTON, qui s' en servit, dit-on, pour cacher la route qu' il avoit suivie, & qui, sûr de l' admiration des grands Géometres, avoit la foiblesse de vouloir encore étonner les esprits médiocres. Mais je ne saurois être de cet avis, soit parce que cette petite charlatannerie me paroît trop indigne de ce grand-homme, soit parce qu' il* &c.

2. Hinc est, quod Geometrae recentiores magnam sibi semper laudem pepererunt, si quandoque quaestionem aliquam Geometrica dumtaxat constructione seu Synthesi definitam ad Analysim feliciter revocarunt, seu ad generales formulas traduxerunt. Desiderabat magnus EULERUS in immortali Opere *De Methodo inveniendi Lineas Curvas Maximi, Minimive proprietate gaudentes Cap. II.* §. 39. methodum aliquam a resolutione geometrica & lineari omnino liberam, per quam analytica generalique expressione repraesentari posset quantitas quaedam, quae per linearem dumtaxat constructionem ab ipso repraesentata Opus illud eximium & cedro dignissimum minus perfectum absolutumque efficiebat. Cum ecce summus Geometra De LA GRANGE invento *Variationum Calculo*, impletoque voto Euleriano (*a*) vix credibile dictu est, quantum inde nactus sit celebritatis & gloriae.

3. Novissime eximius idem Geometra De LA GRANGE *in Novis Actis Berolinensis Academiae* pro anno 1773., editis anno 1775. jure meritoque sibi plaudit, quod pervulgatum Problema De Sphaeroidum Ellipticarum Attractione, a sagacissimo Maclaurino ingeniosissima Synthesi jam pridem solutum, generali directaque methodo tractare, & ad analysim transferre sibi contigerit : hacque porro analytica solutione, tamquam argumento utitur adversus Analysis detractores, qui ut Synthesim, quam unice excoluerunt, in Coelum ferant, Analysim suggillant & carpunt. *Je me propose*, inquit, *dans ce Mémoire de faire voir que bien loin que le Problême dont il s'agit se refuse à l'Analyse, il peut être résolu par ce moyen d' une manière, si non plus simple, du moins plus directe & plus générale*

G 2

(a) Vid. *Mélang. de Phil. & de Math. de la Soc. Roy. de Turin* tom. II. *Essai d' une Nouvelle Méthode pour déterminer les Maxima, & les Minima des Formules intégrales indéfinies, par Mr. De LA GRANGE.*

que par la voie de la Synthese ; ce qui servira à détruire un des principaux argumens que les détracteurs de l'Analyse puissent apporter pour la rabaisser & pour prouver la supériorité de la méthode synthétique des Anciens.

4. Neque minorem consequutus est laudem hic Cl. Geometra; quod in nobilissimo Problemate De Rotatione Corporis nulla vi acceleratrice sollicitati quum binas solutiones Eulerianam, & Alembertianam minus directas ac generales observasset quippe quae notam assumunt positionem trium axium uniformis rotationis, methodum ipse invenerit omnino directam, generalem, ac mere analyticam, per quam nulla assumpta Axium rotationis proprietate (haec enim solutionis esse debet consectarium, non fundamentum) ad Problematis solutionem pervenitur (*b*). In ipso autem Opusculi

(*b*) Vid. *Nouvelle Solution du Problême du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératrice*, in Actis Acad. Berol. tom. cit.

Recentissime EULERUS *in Novis Commentariis Acad. Petropolitanae* tom. XX. Differt. *De Nova Methodo Motum Corporum rigidorum determinandi*, idem Problema retractavit, & elegantissima analysi directe ac generalissime resolvit, demonstrata prius insigni ac pulcherrima corporum quorumque rigidorum proprietate, quod quomodocumque corpus rigidum ex statu initiali in alium quemlibet statum transferatur, in eo semper talis axis definiri possit, cujus directio in utroque statu maneat invariata.

ingressu vere profitetur, *c'est toujours contribuer à l'avancement des Mathématiques que de montrer comment on peut resoudre les mêmes questions & parvenir aux mêmes résultats par des voies très différentes; les méthodes se prêtent par ce moyen un jour mutuel & en acquierent souvent un plus grand degré d'évidence & de généralité.*

5. Quum hujusmodi considerationes se mihi identidem offerrent, animoque saepius obversarentur, novissime factum est, ut tomum vicesimum nuper editum Novorum Academiae Peropolitanae Commentariorum evolvens in Astronomicam Dissertationem inciderim illustris Euleri *De Trajectu citissimo Stellae per duos circulos Almicantarath datos pro qualibet elevatione Poli*; ubi Analysta incomparabilis, repudiata praeter morem analysi quasi ad rem minus idonea, Problema aggreditur via ferme lineari ac synthetica, solutionemque nanciscitur simplicem oppido & elegantem. Perculit me res nova & inaudita, magnum Eulerum in Problematis difficilis solutione Analysi suae valedicere, ac Synthesi inhaerere voluisse: sed admirationem omnem abjeci cum in Euleriani Schediasmatis conclusione haec mihi verba occurrerunt: *Hoc igitur modo sine dubio solutionem simplicissimam problematis propositi sumus nacti, quae, nisi hoc artificium fuisset adhibitum, in calculos vehementer prolixos praecipitasset.*

6. Hac summi Geometrae admonitione deterritus, & inextricabilem calculorum molem ab Eulero praenuntiatam reformidans vix audebam de directa & analytica tam pulchri Problematis solutione cogitare; sed tanti Viri auctoritatem vicit cupiditas experiendi analysis vires in Problemate, cujus analytica solutio ideo Eulero videri potuit immaniter operosa & fere inaccessa, quod per arduum & impeditum iter ad metam fortasse properaverit. At non una est ad veritatem via, neque semper contingit, ut via tutior ac brevior exercitatissimo cuique pateat. Quum itaque Eulerianum hoc Problema ad Analysim revocare statuissem, insperanti mihi contigit, ut via satis expedita aequationem nanciscerer biquadraticam, quam secus atque Eulerus pronunciavit tam evidenter aperteque resolubilem reperi, ut nihil facilius, nihil simplicius expectari posse videretur. Ecce jam totius rei seriem & ordinem.

Fig. 4. 7. Circulus $NN'Q$ repraesentat Horizontem loci; P Polum; Z Zenith; S & S' Sidus, paralleli arcum SS' inter duos datos Almicantarath interceptum citissime trajiciens. Ductis porro circulorum maximorum arcubus, quos schema exhibet, patet esse PQ altitudinem Poli seu loci latitudinem, ejusque complementum PZ; SN altitudinem Sideris, & illius

complementum SZ; $S'N'$ altitudinem aliam Sideris, ejusque complementum $S'Z$; PS, vel sibi aequalem PS' esse complementum declinationis ejusdem Sideris; denique ZPS angulum unum horarium, ZPS' alterum. Fiat modo.

Altitudo Astri	SN	. . .	$= a$
Altitudo alia	$S'N'$	. . .	$= a'$
Latitudo Terrestris	PQ	. . .	$= l$
Astri declinatio		. . .	$= x$
Angulus Horarius	ZPS	. . .	$= h$
Angulus alter Horarius	ZPS'	. . .	$= h'$

8. Hoc facto manifestum est, fore

$$\begin{aligned} \text{sin. } PZ \;\ldots\ldots &= \text{cos. } l \\ \text{sin. } ZS \;\ldots\ldots &= \text{cos. } a \\ \text{sin. } ZS' \;\ldots\ldots &= \text{cos. } a' \\ \text{sin. } PS = \text{sin. } PS' &= \text{cos. } x \end{aligned}$$

rursus

$$\begin{aligned} \text{cos. } PZ \;\ldots\ldots &= \text{sin. } l \\ \text{cos. } ZS \;\ldots\ldots &= \text{sin. } a \\ \text{cos. } ZS' \;\ldots\ldots &= \text{sin. } a' \\ \text{cos. } PS = \text{cos. } PS' &= \text{sin. } x \end{aligned}$$

Constat vero ex Trigonometria Sphaerica, in Triangulo ZPS hanc dari aequalitatem $\text{cos. } ZPS = \frac{\text{cos. } ZS - \text{cos. } PZ \text{ cos. } PS}{\text{sin. } PZ \text{ sin. } PS}$, & in triangulo ZPS'

iſtam $\cos.\ ZPS' = \frac{\cos. ZS' - \cos. PZ \cos. PS'}{\sin. PZ \sin. PS'}$

9. Factis ſubſtitutionibus hae aequalitates nanciſcuntur hanc formam $\cos.\ h = \frac{\sin.\ a - \sin.\ l \sin.\ x}{\cos. l \cos. x}$,

$\cos. h' = \frac{\sin.\ \grave{a} - \sin.\ l \sin.\ x}{\cos. l. \cos. x}$. Quoniam in hoc problemate quaeritur declinatio Sideris, quod breviſſimo tempore paralelli arcum SS' inter duos datos Almicantarath conclusum tranſcurrit, hujuſque temporis menſura eſt angulus $SPS' = ZPS' - ZPS = h' - h$; fiet idcirco $d. (h' - h) = dh' - dh = 0$. Ut valores eliciam fluxionum dh' & dh, ſumo differentialia praedictarum aequalitatum, & invenio

$$-dh \sin. h = \frac{dx(\sin. a \sin. x - \sin. l)}{\cos. l \cos.^2 x}, \ \&$$

$$-dh' \sin. h' = \frac{dx(\sin. \grave{a} \sin. x - \sin. l)}{\cos. l \cos.^2 x}; \text{ proindeque}$$

$$-dh = \frac{dx(\sin. a \sin. x - \sin. l)}{\sin. h \cos. l \cos.^2 x},$$

$$dh' = -\frac{dx(\sin. \grave{a} \sin. x - \sin. l)}{\sin. h' \cos. l \cos.^2 x}.$$

10. Porro habetur $\sin. h = \frac{1}{\cos. l \cos. x} \times$

$\sqrt{(2 \sin. a \sin. l \sin. x - \sin.^2 a - \sin.^2 x + \cos.^2 l)}$, &

$\sin. h' = \frac{1}{\cos. l \cos. x} \times$

$\sqrt{(2 \sin. \grave{a} \sin. l \sin. x - \sin.^2 \grave{a} - \sin.^2 x + \cos.^2 l)}$.

Igitur

$$dh' - dh = \frac{dx(\sin. a \sin. x - \sin. l)}{\cos. x \sqrt{(2 \sin. a \sin. l \sin. x - \sin.^2 a - \sin.^2 x + \cos.^2 l)}}$$

$$- \frac{dx(\sin. \grave{a} \sin. x - \sin. l)}{\cos. x \sqrt{(2 \sin. \grave{a} \sin. l \sin. x - \sin.^2 \grave{a} - \sin.^2 x + \cos.^2 l)}}$$

$= 0$. Quare $\frac{\sin. a \sin. x - \sin. l}{\sqrt{(2 \sin. a \sin. l \sin. x - \sin.^2 a - \sin.^2 x + \cos.^2 l)}}$

$$= \frac{\sin. \grave{a} \sin. x - \sin. l}{\sqrt{(2 \sin. \grave{a} \sin. l \sin. x - \sin.^2 \grave{a} - \sin.^2 x + \cos.^2 l)}}.$$

11. Ab hac poſtrema aequatione elimino aſymmetriam, & poſt debitas reductiones nanciſcor aequationem biquadraticam hanc

$$(\sin.^2 a - \sin.^2 \grave{a})\sin.^4 x + (2\sin.a \sin.^2 \grave{a} \sin.l - 2\sin.\grave{a}\sin.^2 a \sin.l + 2\sin.\grave{a}\sin.l - 2\sin.a\sin.l)\sin.^3 x - \cos.^2 l(\sin.^2 a - \sin.^2\grave{a})\sin.^2 x - (2\sin.a\sin.^2\grave{a}\sin.l - 2\sin.\grave{a}\sin.^2 a\sin.l + 2\sin.\grave{a}\sin.l - 2\sin.a\sin.l)\sin.x + \sin.^2\grave{a}\sin.^2 l - \sin.^2 a\sin.^2 l = 0.$$

In hac autem aequatione ſtatim apparet, coefficientem ſecundi termini quadrinomium contrahi poſſe in binomium $-(2\sin.a\cos.^2\grave{a} - 2\sin.\grave{a}\cos.^2 a)\sin.l$, & coefficientem quarti in binomium oppoſitum $(2\sin.a \times \cos.^2\grave{a} - 2\sin.\grave{a}\cos.^2 a)\sin.l$. Quapropter diviſa aequatione per $\sin.^2 a - \sin.^2\grave{a}$, invenitur

$$\sin.^4 x - \frac{(2\sin.a\cos.^2\grave{a} - 2\sin.\grave{a}\cos.^2 a)\sin.l}{\sin.^2 a - \sin.^2\grave{a}}\sin.^3 x - \cos.^2 l\sin.^2 x + \frac{(2\sin.a\cos.^2\grave{a} - 2\sin.\grave{a}\cos.^2 a)\sin.l}{\sin.^2 a - \sin.^2\grave{a}}\sin.x - \sin.^2 l = 0.$$

12. Jam vero aequationem hanc vel oſcitanter conſideranti ſtatim occurrit, utramque hypotheſim $\sin.x = 1$, & $\sin.x = -1$ ipſi aequationi ſatisfacere, ac proinde $\sin.^2 x - 1$ eſſe illius diviſorem. Quamobrem diviſione abſoluta oritur quadratica aequatio

$$\sin.^2 x - \frac{(2\sin.a\cos.^2\grave{a} - 2\sin.\grave{a}\cos.^2 a)\sin.l}{\sin.^2 a - \sin.^2\grave{a}}\sin.x$$

$+\sin.^2 l = 0$, cujus radix eſt $\sin.x = \frac{\sin.a\cos.^2\grave{a} - \sin.\grave{a}\cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2\grave{a}}\sin.l$

$$\pm\sin.l\sqrt{\left(\left(\frac{\sin.a\cos.^2\grave{a} - \sin.\grave{a}\cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2\grave{a}}\right)^2 - 1\right)}.$$

13. Itaque radices omnes aequationis ſuperioris habemus in poteſtate, nempe

1. $\sin.x = 1$

2. $\sin.x = -1$

$$3.\ \sin.x = \frac{\sin.a\cos.^2\grave{a} - \sin.\grave{a}\cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2\grave{a}}\sin.l + \sin.l\sqrt{\left(\left(\frac{\sin.a\cos.^2\grave{a} - \sin.\grave{a}\cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2\grave{a}}\right)^2 - 1\right)}$$

$$4.\ \sin.x = \frac{\sin.a\cos.^2\grave{a} - \sin.\grave{a}\cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2\grave{a}}\sin.l - \sin.l\sqrt{\left(\left(\frac{\sin.a\cos.^2\grave{a} - \sin.\grave{a}\cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2\grave{a}}\right)^2 - 1\right)}$$

14. Expendamus jam paullo diligentius harum radicum indolem, & quae Problemati ſolvendo pares

ſint, quaeve haudquaquam idoneae indigitemus. Ac primo liquet, radices priores duas $\sin. x = 1$, $\sin. x = -1$ ad rem noſtram non eſſe; nam Sidera integro quadrante Boream, & Auſtrum verſus ab Æquatore remota, atque adeo Polum utrumque occupantia nec detecta unquam ſunt, nec diurna, ſi exiſterent, raperentur vertigine, quae tamen Problematis conſtituit hypotheſim.

15. Excutienda nunc reſtat tertia radix

$$\sin. x = \frac{\sin. a \cos.^2 \grave{a} - \sin. \grave{a} \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 \grave{a}} \sin. l$$

$$+ \sin. l \sqrt{\left(\left(\frac{\sin. a \cos.^2 \grave{a} - \sin. \grave{a} \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 \grave{a}} \right)^2 - 1 \right)}.$$

Adverto itaque ſtatim, aequationem ſuperiorem biquadraticam produci tum ex poſitione $dh' - dh = 0$, tum ex poſitione $dh' + dh = 0$; nam in aequalitatibus $dh' = dh$, & $dh' = - dh$ quadratis utrinque membris ſignorum oppoſitio evaneſcit, habeturque $dh'^2 = dh^2$, atque inde biquadratica aequatio §. 11. Porro tertia haec radix $\sin. x$ ſpectat ad poſitionem $dh' + dh = 0$, minime vero ad poſitionem noſtram $dh' - dh = 0$, adeoque in hoc problemate, quod nititur hypotheſi $dh' - dh = 0$, eſt omnino rejicienda. Id demonſtrabitur, ſi in

expreſſione $dh + dh'$ ſubſtituto valore hujus radicis quantitas producatur evidenter nihilo aequalis; quod ſane contingere, ita oſtendo: Ponamus demonſtrationis contrahendae gratia, Almicantarath alterutrum cum Horizonte congruere, ita ut ipſius altitudo $\grave{a}$ ſit $= 0$; oriturque in hac hypotheſi tertia haec radix $\sin. x$

$$= \frac{\sin. l}{\sin. a} + \sin. l \sqrt{\left(\frac{1}{\sin.^2 a} - 1 \right)} = \frac{\sin. l + \sin. l \cos. a}{\sin. a}.$$

Loco $\sin. x$ ſubſtituo hunc valorem in expreſſione $dh + dh'$ §. 10., & conſequor $dh + dh'$

$$= - dx \sin. l \cos. a : \left(\cos. x \sqrt{\left(2 \sin.^2 l + 2 \sin.^2 l \cos. a \right.}\right.$$

$$\left.\left. - \sin.^2 a + \cos.^2 l - \frac{\sin.^2 l}{\sin.^2 a} - \frac{2 \sin.^2 l \cos. a}{\sin.^2 a} - \frac{\sin.^2 l \cos.^2 a}{\sin.^2 a} \right) \right)$$

$$+ dx \sin. l : \left(\cos. x \sqrt{\left(\cos.^2 l - \frac{\sin.^2 l}{\sin.^2 a} \right.}\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2 \sin.^2 l \cos. a}{\sin.^2 a} - \frac{\sin.^2 l \cos.^2 a}{\sin.^2 a} \right) \right);$$

& ſi primum radicale dicatur $\sqrt{A}$, alterum $\sqrt{B}$ fiet $dh + dh' = - \frac{dx \sin. l \cos. a \sqrt{B} + dx \sin. l \sqrt{A}}{\cos.^2 x \sqrt{AB}}$.

Eſt autem $\cos. a \sqrt{B} = \sqrt{(B - B \sin.^2 a)} = \sqrt{A}$. Igitur $dh + dh' = 0$. Quapropter tertia haec radix aliam respicit hypothesim a nostra diversam, nec est proinde attendenda.

16. Sola ergo superest quarta radix

$$\text{sin. } x = \frac{\text{sin. } a \text{ cos.}^2 \, \grave{a} - \text{sin. } \grave{a} \text{ cos.}^2 \, a}{\text{sin.}^2 \, a - \text{sin.}^2 \, \grave{a}} \text{ sin. } l$$

$$- \text{sin. } l \sqrt{\left(\left(\frac{\text{sin. } a \text{ cos.}^2 \, \grave{a} - \text{sin. } \grave{a} \text{ cos.}^2 \, a}{\text{sin.}^2 a - \text{sin.}^2 \grave{a}} \right)^2 - 1 \right)},$$

quae Problematis solutionem praebet. Hic autem primo occurrit, in regionibus sub aequatore sitis, ubi scilicet $l = 0$, sidera in aequatore ipso constituta iter illud citissimum conficere; in hac quippe hypothesi invenitur $\text{sin. } x = 0$: in regionibus vero reliquis citra vel ultra aequatorem sidera citissimi trajectus declinationem semper aliquam habent, quandoquidem si nullam haberent, hoc est si $\text{sin.} x$, seu $\frac{\text{sin.} a \text{ cos.}^2 \grave{a} - \text{sin.} \grave{a} \text{cos.}^2 a}{\text{sin.}^2 a - \text{sin.}^2 \grave{a}} \text{sin.} l$

$$- \text{sin. } l \sqrt{\left(\left(\frac{\text{sin.} a \text{ cos.}^2 \, \grave{a} - \text{sin. } \grave{a} \text{ cos.}^2 \, a}{\text{sin.}^2 a - \text{sin.}^2 \grave{a}} \right)^2 - 1 \right)}$$

foret nihilo aequalis, prodiret $- \text{sin.}^2 l = 0$, quod est absurdum.

17 Si altitudo a accipiatur $= 90°$, & sidera quaerantur, quorum ascensus ab altitudine altera $\grave{a}$ ad Zenith sit omnium celerrimus, invenitur $\text{sin.} x = \text{sin.} l$;

nam, quum in hac hypothesi sit $\text{sin. } a = 1$, $\text{cos. } a = 0$, evanescit quantitas radicalis, ac remanet $\text{sin. } x = \text{sin. } l$, adeoque $x = l$. Quocirca sidera, quorum declinatio est Poli elevationi aequalis, citissime ab altitudine qualibet data ad Zenith progrediuntur. Sed unicum est in hac hypothesi *minimum tempus*, nec proinde cum aliis conferendum, siquidem una tantum est declinatio Astrorum per Zenith transeuntium. Idem reperitur, si facto ut prius $a = 90°$, sumatur $\grave{a} = 0$, seu quaeratur declinatio siderum ab horizonte ad zenith celerrime ascendentium.

18. Congruente alterutro Almicantarath cum Horizonte, seu facto $\grave{a} = 0$, atque hinc $\text{sin. } \grave{a} = 0$, $\text{cos. } \grave{a} = 1$, oritur $\text{sin. } x = \frac{\text{sin. } l - \text{sin. } l \text{ cos. } a}{\text{sin. } a}$ $= \text{sin. } l \; \frac{1 - \text{cos.} a}{\text{sin. } a}$. Liquet autem, esse $\text{tang. } \frac{1}{2} a$ $= \frac{1 - \text{cos.} a}{\text{sin. } a}$; propterea fit $\text{sin.} x = \text{sin.} l. \text{ tang. } \frac{1}{2} a$. Est porro $\text{tang. } \frac{1}{2} a$ semper unitate minor praeter unicum casum, quo est $a = 90°$, & ideo $\text{tang.} \frac{1}{2} a = 1$: igitur sidera, quae ab Horizonte ad datam altitudinem brevissimo tempore attolluntur, minus ab aequatore distant quam locus terrestris, eaque tantum, quae Zenith diurna vertigine attingunt, eandem habent ab

aequatore diſtantiam ac regio terreſtris.

19. Minimum autem tempus, quo ſidera ab Horizonte ad datam altitudinem perveniunt, invenitur in hunc modum: Ex §. 9. eſt $sin.\, h'\,(sin.\, a\; sin.\, x - sin.\, l) + sin.\, h\; sin.\, l = 0$; adeoque ſubſtituto valore $sin.\, x$, fit $sin\, h = sin\, h'\; cos.\, a$. Rurſus $cos.\, h' = - \frac{sin.\, l\, sin.\, x}{cos.\, l\, cos.\, x}$, & $cos.\, h = \frac{sin.\ a}{cos.\, l.\ cos.\, x} + cos.\, h'$. Igitur $cos.\,(h' - h)$

$$= cos.\, h'\; cos.\, h + sin.\, h'\; sin\, h = \frac{sin.\, a\;\; cos.\, h'}{cos.\, l.\;\; cos.\, x}$$

$$+ cos.^2\, h' + cos.\, a\; sin.^2\, h' = \frac{sin.\, a\; cos.\, h'}{cos.\, l\; cos.\, x} + cos.^2\, h'$$

$- cos.\, a\; cos.^2\, h' + cos.\, a$, ſeu ſubrogato valore $cos.\, h'$ $= - \frac{sin.\, l.\, sin.\, x}{cos.\, l.\ cos.\, x}$, & $cos.^2\, h' = \frac{sin.^2\, l\; sin.^2\, x}{cos.^2\, l\; cos.^2\, x}$, prodit

$$cos.(h' - h) = cos.\, a + \frac{[(1 - cos.\, a)\, sin.\, l.\, sin.\, x - sin.\, a]\; sin.\, l\, sin.\, x}{cos.^2\, l\; cos.^2\, x}.$$

Eſt porro §. 18. $(1 - cos.\, a)\; sin.\; l = sin.\; a\; sin.\; x$;

propterea fiet $cos.(h' - h) = cos.\, a + \frac{sin.\, a\, sin.\, l\, sin.\, x\, (sin.^2\, x - 1)}{cos.^2\; l\, cos.^2\, x}$

$$= cos.\, a - \frac{sin.\, a\, sin.\, l\, sin.\, x}{cos.^2\; l} = cos.\, a - sin.\, a\; tang.^2\, l\; tang.\, \tfrac{1}{2}\, a.$$

Quum autem conſtet, eſſe $tang.\, \tfrac{1}{2}\, a$

$$= \sqrt{\frac{1 - cos.\, a}{1 + cos.\, a}} = \frac{\sqrt{(1 - cos.^2\, a)}}{1 + cos.\ a} = \frac{sin.\, a}{1 + cos.\, a},$$

atque inde $sin.\, a\; tang.\, \tfrac{1}{2}\, a = \frac{sin.^2\, a}{1 + cos.\, a} = \frac{1 - cos.^2\, a}{1 + cos.\, a}$

$= 1 - cos.\, a = 2\, sin.^2\, \tfrac{1}{2}\, a$; oritur iccirco $cos.\,(h' - h)$ $= cos.\ a - 2\ tang.^2\, l\; sin.^2\, \tfrac{1}{2}\, a = 1 - 2\, sin.^2\, \tfrac{1}{2}\, a$ $- 2\, tang.^2\, l\; sin.^2\, \tfrac{1}{2}\, a = 1 - 2\, sin.^2\, \tfrac{1}{2}\, a\, (1 + tang.^2\, l)$ $= 1 - 2\, sin.^2\, \tfrac{1}{2}\, a\; sec.^2\, l = 1 - \frac{2\, sin.^2\, \frac{1}{2}\, a}{cos.^2\, l}$. Inventa eſt igitur expreſſio ſimplex & concinna $1 - \frac{2\, sin.^2\, \frac{1}{2}\, a}{cos.^2\, l}$ pro coſinu illius arcus $h' - h$, qui tempus quaeſitum repraeſentat. Sed ſimplicior adhuc reddi poteſt hujuſmodi formula; haec enim fit $\frac{2\, sin.^2\, \frac{1}{2}\, a}{cos.^2\, l} =$ $1 - cos.(h' - h) = 2\, sin.^2\, \tfrac{1}{2}\,(h' - h)$. Quocirca $sin.\, \tfrac{1}{2}\,(h' - h)$ $= \frac{sin.\, \frac{1}{2}\, a}{cos.\, l}$, expreſſio ſimpliciſſima ſemiarcus tempus dimidium propoſitum metientis.

20. Si dimidium datae altitudinis aequetur complemento elevationis Poli, hoc eſt $\tfrac{1}{2}\, a = 90° - l$,

invenitur declinatio Aſtri citiſſime aſcendentis aequalis ejuſdem altitudinis dimidio: nam $\text{ſin.}\, x = \text{ſin.}\, l \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2} a = \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} a$. Tempus vero aſcenſus Aſtri ab horizonte ad altitudinem a elicitur ex formula $\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} (h' - h)$

$$= \frac{\text{ſin.}\, \frac{1}{2} a}{\cos. l} = \frac{\text{ſin.}\, \frac{1}{2} a}{\text{ſin.}\, \frac{1}{2} a} = 1;$$ unde oritur $\tfrac{1}{2} h' - \tfrac{1}{2} h$

$= 90°$, & $h' - h = 180°$, ex quo habentur $12.^{h.}$ temporis ſiderei, vel $11.^{h.}\; 58'.\; 2''$ temporis medii. In hac enim hypotheſi parallelus ab Aſtro deſcriptus tangitur ab horizonte & almicantarath in binis oppoſitis punctis, ſeu ſemiperipheria diſtantibus. Si autem dimidium altitudinis datae excedat complementum elevationis Poli, nanciſcimur temporis expreſſionem omnino repugnantem, ſeu $\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} (h' - h) = \dfrac{\text{ſin.}\, \frac{1}{2} a}{\cos. l} > 1$, quod eſt abſurdum. Sane in hac hypotheſi nullum eſt Aſtrum, cujus parallelus horizonti ſimul & dato almicantarath occurrat; paralleli enim omnes horizontem ſecantes vel tangentes ad almicantarath non protenduntur, & qui almicantarath ſecant vel tangunt ad horizontem non pertingunt.

21. In regionibus aequatoriis ſidera, quae omnium velociſſime tranſeunt ab uno ad alterum almicantarath, ſunt ea, quae aequatorem ipſum deſcribunt ſeu quorum nulla eſt declinatio; nam in formula §. 16. ſumpto $l = 0$, oritur $\text{ſin.}\, x = 0$. Tempus autem hujuſce tranſitus eſt $= a - \grave{a}$; quum in hac hypotheſi ſint a, & $\grave{a}$ arcus aequatoris per zenith tranſeuntis, ſimulque complementa angulorum, vel arcuum h', & h; ac proinde $h' - h = a - \grave{a}$.

22. Ad rei totius illuſtrationem operae pretium eſt exemplum afferre, & formulae §. 16. evolutionem ob oculos ponere. Quaeritur itaque in hac Urbe TICINI ejus Sideris declinatio quod breviſſimo tempore ab altitudine $\grave{a}$ 20° ad altitudinem a 50° pertingit. En calculi typum.

$\grave{a}$	$= 20°$
a	$= 50°$
l	$= 45°.\ 11'$
$\log. \cos. \grave{a}$	$= 9,\ 9729858$
$\log. \cos.^2 \grave{a}$	$= 9,\ 9459716$
$\log. \text{ſin.}\, a$	$= 9,\ 8842540$
$\log. \text{ſin.}\, a \cos.^2 \grave{a}$	$= 9,\ 8302256$
$\text{ſin.}\, a \cos.^2 \grave{a}$	$= 0,\ 676434$
$\log. \cos. a$	$= 9,\ 8080675$
$\log. \cos.^2 a$	$= 9,\ 6161350$

$$\log.\sin.\grave{a} \;\ldots\ldots\; = 9,5340517$$
$$\log.\sin.\grave{a}\cos.^2 a \;\ldots\ldots\; = 9,1501867$$
$$\sin.\grave{a}\cos.^2 a \;\ldots\ldots\; = 0,1413145$$
$$\sin.a\cos.^2\grave{a}-\sin.\grave{a}\cos.^2 a \;\ldots\; = 0,5351195$$
$$\log.\sin.^2 a \;\ldots\ldots\; = 9,7685080$$
$$\sin.^2 a \;\ldots\ldots\; = 0,586824$$
$$\log.\sin.^2\grave{a} \;\ldots\ldots\; = 9,0681034$$
$$\sin.^2\grave{a} \;\ldots\ldots\; = 0,116978$$
$$\sin.^2 a-\sin.^2\grave{a} \;\ldots\ldots\; = 0,469846$$
$$\log.(\sin.a\cos.^2\grave{a}-\sin.\grave{a}\cos.^2 a) \;.\; = 9,7284508$$
$$\log.(\sin.^2 a-\sin.^2\grave{a}) \;\ldots\; = 9,6719555$$
$$\log.\frac{\sin.a\cos.^2\grave{a}-\sin.\grave{a}\cos.^2 a}{\sin.^2 a-\sin.^2\grave{a}} \;.\; = 0,0564953$$
$$\log.\sin.l \;\ldots\ldots\; = 9,8508702$$
$$\log.\frac{\sin.a\cos.^2\grave{a}-\sin.\grave{a}\cos.^2 a}{\sin.^2 a-\sin.^2\grave{a}}\sin.l = 9,9073655$$
$$\frac{\sin.a\cos.^2\grave{a}-\sin.\grave{a}\cos.^2 a}{\sin.^2 a-\sin.^2\grave{a}}\sin.l \;.\; = 0,807915$$
$$\log.\left(\frac{\sin.a\cos.^2\grave{a}-\sin.\grave{a}\cos.^2 a}{\sin.^2 a-\sin.^2\grave{a}}\right)^2 = 0,1129906$$

$$\left(\frac{\sin.a\cos^2\grave{a}-\sin.\grave{a}\cos.^2 a}{\sin.^2 a-\sin.^2\grave{a}}\right)^2 \;\ldots\ldots\; 1,29715$$
$$\left(\frac{\sin.a\cos.^2\grave{a}-\sin.\grave{a}\cos.^2 a}{\sin.^2 a-\sin.^2\grave{a}}\right)^2-1 \;\ldots\; 0,29715$$
$$\log.\left(\left(\frac{\sin.a\cos.^2\grave{a}-\sin.\grave{a}\cos.^2 a}{\sin.^2 a-\sin.^2\grave{a}}\right)^2-1\right) \;..\; 9,4729757$$
$$\log.\sqrt{\left(\left(\frac{\sin.a\cos.^2\grave{a}-\sin.\grave{a}\cos.^2 a}{\sin.^2 a-\sin.^2\grave{a}}\right)^2-1\right)} \;..\; 9,7364878$$
$$\log.\sin.l\sqrt{\left(\left(\frac{\sin.a\cos.^2\grave{a}-\sin.\grave{a}\cos.^2 a}{\sin.^2 a-\sin.^2\grave{a}}\right)^2-1\right)} \;..\; 9,5873580$$
$$\sin.l\sqrt{\left(\left(\frac{\sin.a\cos.^2\grave{a}-\sin.\grave{a}\cos.^2 a}{\sin.^2 a-\sin.^2\grave{a}}\right)^2-1\right)} \;..\; 0,386686$$
$$\sin.x \;\ldots\ldots\ldots\; 0,421229$$

Igitur ſideris declinatio quaeſita $x = 24°.\ 54'.\ 44''$.

23. Res nunc poſtulat, ut formula §. 16. valorem $\sin.x$ repraeſentans brevior, ſimplicior, & ad uſum magis idonea ac parata reddatur. Hoc autem ita conficio: Notum eſt, dato quovis angulo φ eſſe $\sin.\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1-\cos.\varphi}{2}}$, & $\cos.\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1+\cos.\varphi}{2}}$. Igi-

tur $\text{sin.}\tfrac{1}{2}(a+\grave{d}) = \sqrt{\frac{1-\cos.(a+\grave{d})}{2}}$, &

$\cos.\tfrac{1}{2}(a-\grave{d}) = \sqrt{\frac{1+\cos.(a-\grave{d})}{2}}$; atque inde

$$\frac{\text{sin.}\tfrac{1}{2}(a+\grave{d})}{\cos.\tfrac{1}{2}(a-\grave{d})} = \sqrt{\frac{1-\cos.(a+\grave{d})}{1+\cos.(a-\grave{d})}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,\grave{d}-\cos.\,a\cos.\,\grave{d}}{1+\text{sin.}\,\grave{d}\,\text{sin.}\,a+\cos.\,a\cos.\,\grave{d}}}$$

$$= \frac{1+\text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,\grave{d}-\cos.\,a\cos.\,\grave{d}}{\sqrt{[(1+\text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,\grave{d})^2-\cos.^2 a\cos.^2\grave{d}]}}$$

$$= \frac{1+\text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,\grave{d}-\cos.\,a\cos.\,\grave{d}}{\sqrt{(1+2\,\text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,\grave{d}+\text{sin.}^2 a\,\text{sin.}^2\grave{d}-\cos.^2 a\cos.^2\grave{d})}}$$

$$= \frac{1+\text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,\grave{d}-\cos.\,a\cos.\,\grave{d}}{\text{sin.}\,a+\text{sin.}\,\grave{d}}$$

$$= \frac{(\text{sin.}\,a-\text{sin.}\,\grave{d})(1+\text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,\grave{d}-\cos.\,a\cos.\,\grave{d})}{\text{sin.}^2 a-\text{sin.}^2\grave{d}}$$

$$= \frac{\text{sin.}\,a\cos.^2\grave{d}-\text{sin.}\,\grave{d}\cos.^2 a}{\text{sin.}^2 a-\text{sin.}^2\grave{d}} - \frac{\cos.\,a\cos.\,\grave{d}(\text{sin.}\,a-\text{sin.}\,\grave{d})}{\text{sin.}^2 a-\text{sin.}^2\grave{d}}.$$

Eſt porro quantitas $\frac{\cos.\,a\cos.\,\grave{d}(\text{sin.}\,a-\text{sin.}\,\grave{d})}{\text{sin.}^2 a-\text{sin.}^2\grave{d}}$

$$= \frac{\cos.\,\grave{d}(\text{sin.}\,a-\text{sin.}\,\grave{d})}{\text{sin.}^2 a-\text{sin.}^2\grave{d}}\sqrt{(1-\text{sin.}^2 a)}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos.^2\grave{d}(\text{sin.}^2 a-2\,\text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,\grave{d}+\text{sin.}^2\grave{d})(1-\text{sin}^2 a)}{(\text{sin.}^2 a-\text{sin.}^2\grave{d})^2}},$$

quae poſtrema expreſſio per idoneas reductiones convertitur in $\sqrt{\left(\left(\frac{\text{sin.}\,a\cos.^2\grave{d}-\text{sin.}\,\grave{d}\cos.^2 a}{\text{sin.}^2 a-\text{sin.}^2\grave{d}}\right)^2-1\right)}$.

Igitur poſtremo $\text{sin.}\,x = \frac{\text{sin.}\,a\cos.^2\grave{d}-\text{sin.}\,\grave{d}\cos.^2 a}{\text{sin.}^2 a-\text{sin.}^2\grave{d}}\,\text{sin.}\,l$

$$-\,\text{sin.}\,l\sqrt{\left(\left(\frac{\text{sin.}\,a\cos.^2\grave{d}-\text{sin.}\,\grave{d}\cos.^2 a}{\text{sin.}^2 a-\text{sin.}^2\grave{d}}\right)^2-1\right)}$$

$= \frac{\text{sin.}\,l\,\text{sin.}\tfrac{1}{2}(a+\grave{d})}{\cos.\tfrac{1}{2}(a-\grave{d})}$; quae ſane expreſſio ſimplicitate & elegantia cum ſimpliciſſimis & elegantiſſimis certat.

24. Eapropter *ſinus declinationis quaeſitae eſt quartus proportionalis ad coſinum ſemidifferentiae datarum altitudinum, vel ſemidiſtantiae binorum Almicantarath, ad ſinum ſemiſummae earundem altitudinum, & ad ſinum latitudinis terreſtris*. Atque ideo in ſuperiori exemplo §. 22. habebitur

$\log.\ \sin.\ l$	9, 8508702
$\log.\ \sin.\frac{1}{2}\ (a+\grave{a})$	9, 7585913
$\log.\ \sin.l\ \sin.\frac{1}{2}\ (a+\grave{a})$	9, 6094615
$\log.\ \cos.\frac{1}{2}\ (a-\grave{a})$	9, 9849438
$\log.\ \sin.\ x$	9, 6245177

Igitur $x = 24°.\ 54'.\ 44''$, prorsus idem ac supra §. 22.

25. Inventa declinatione Sideris breviſſimo tempore per binos datos Almicantarath tranſeuntis, invenitur etiam tempus ipſius tranſitus, hoc eſt arcus $h' - h$ in hunc modum: Per §. 9. eſt $\cos.\ h = \frac{\sin.\ a}{\cos.l\ \cos.\ x} - \mathrm{tang.}l\ \mathrm{tang.}\ x$, & $\cos.\ h' = \frac{\sin.\ \grave{a}}{\cos.l\ \cos.\ x} - \mathrm{tang.}l\ \mathrm{tang.}\ x$. Ergo dabitur tum $\cos.\ h$, tum $\cos.\ h'$; proindeque etiam h, & h'. Quocirca angulus $h' - h$ datus pariter erit, qui ſtatim in tempus convertitur. Sic in exemplo praecedenti

$\log.\ \sin.\ a$	9, 8842540
$\log.\ \cos.\ l$	9, 8480909
$\log.\ \cos.\ x$	9, 9575854
$\log.\ \cos.l\ \cos.x$	9, 8056763

$\log.\frac{\sin.a}{\cos.\ l\ \cos.\ x}$	0, 0785777
$\frac{\sin.a}{\cos.l\ \cos.\ x}$	1, 1983336
$\log.\ \mathrm{tang.}\ l$	0, 0027793
$\log.\ \mathrm{tang.}\ x$	9, 6669332
$\log.\ \mathrm{tang.}l\ \mathrm{tang.}x$	9, 6697125
$-\ \mathrm{tang.}\ l\ \mathrm{tang}\ x$	$-$0, 4674256
$\frac{\sin.\ a}{\cos.l\ \cos.x} - \mathrm{tang.}l\,\mathrm{tang.}x = \cos.h$.	0, 7309080
h	43°. 2'. 15"
$\log.\ \sin.\ \grave{a}$	9, 5340517
$\log.\ \cos.\ l\ \cos.x$	9, 8056763
$\log.\frac{\sin.\ \grave{a}}{\cos.\ l.\ \cos.x}$	9, 7283754
$\frac{\sin.\ \grave{a}}{\cos.l\ \cos.x}$	0, 5350266
$-\ \mathrm{tang.}l\ \mathrm{tang.}x$	$-$0, 4674256
$\frac{\sin.\grave{a}}{\cos.l\ \cos.x} - \mathrm{tang.}l\,\mathrm{tang.}x = \cos.h'$.	0, 0676010
h'	86°. 7'. 26"

$h' - h$ . . . . $43.^{\circ}\ 5.'\ 11''$

Facta hujusce anguli $h' - h$ conversione in tempus, prodeunt $2.^{hor.}\ 52.^{min.}\ 21.^{sec.}$ temporis siderei, seu $2.^{h.}\ 51.^{m.}\ 52.^{s}$ temporis medii.

26. Denique celeberrimum *Minimi Crepusculi* Problema nihil aliud est nisi purum putumque Problematis istius corollarium. In illo enim quaeritur anni dies, quo Sol velocissime spatium trajicit comprehensum ab horizonte, & circulo crepusculari sive almicantarath decem octo circiter gradibus infra horizontem depresso. Formula §. 18. $\sin.\ x = \sin.\ l\ \tan g.\ \frac{1}{2}\ a$ quaesitam suppeditat Solis declinationem, adeoque anni tempus, quo crepusculum omnium brevissimum observatur. Quum autem hic sumatur a negative, quippe quae depressionem exprimit circuli crepuscularis; prodit icclrco $\sin.\ x = -\sin.\ l.\ \tan g.\ \frac{1}{2}\ a$. Quocirca in regionibus Borealibus Solis declinatio minimi Crepusculi tempore est semper Australis, hoc est minimum contingit crepusculum Sole in signis australibus versante.

27. Minimi crepusculi duratio habetur ex formula §. 19. $\sin.\frac{1}{2}(h' - h) = \frac{\sin.\ \frac{1}{2}\ a}{\cos.\ l}$, qua in formula quum quantitates a, & $h' - h$ in hac hypothesi sint utrinque

negativae, spectari ideo potuerunt veluti positivae, & $\sin.\ \frac{1}{2}\ (h' - h)$ permutari poterit cum $\sin.\frac{1}{2}\ (h - h')$. Quum autem sit $\frac{1}{2}\ a = 9^{\circ}$, si fuerit $l = 81^{\circ}$, orietur $\sin.\ \frac{1}{2}\ (h - h') = 1$, hoc est $h - h' = 180^{\circ}$: videlicet minimi Crepusculi duratio in latitudine terrestri 81° constat $12.^{hor.}$ sidereis, vel $11.^{h.}\ 58.^{m}\ 2.^{s.}$ solaribus mediis. In latitudine autem majori duratio elicitur absurda, nimirum $\sin.\ \frac{1}{2}\ (h - h') > 1$. Duratio demum minimi Crepusculi brevissima, seu *Minimarum Minima* sub aequatore manifestatur, & quidem aequinoctiorum tempore; nam fit $\sin.x = -\sin.l\ \tan g.\frac{1}{2}\ a$

$$= 0,\ \&\ \sin.\ \frac{1}{2}\ (h - h') = \frac{\sin.\ \frac{1}{2}\ a}{\cos.\ l} = \sin.\ \frac{1}{2}\ a$$

$= \sin.\ 9^{\circ}$, seu $h - h' = 18^{\circ}$; quod praebet $1.^{hor.}\ 12.^{m.}$ temporis siderei, vel $1.^{h.}\ 11.^{m.}\ 47.^{s.}$ temporis medii.

28. In hac nostra Ticinensi latitudine dies, & duratio minimi Crepusculi ex formulis $\sin.\ x = -\sin.l\ \tan g.\frac{1}{2}\ a$, & $\sin.\frac{1}{2}(h - h') = \frac{\sin.\ \frac{1}{2}\ a.}{\cos.\ l}$ propere inveniuntur:

l . . . . $45.^{\circ}\ 11'$

a . . . . $18.^{\circ}$

$\log.\ \sin.\ l$ . . . . $9,8508702$

log. tang. $\frac{1}{2}$ *a*	. . . .	9, 1997125
log. ſin. l tang. $\frac{1}{2}$ *a*	. . . . . .	9, 0505827

Igitur $x = - 6.° 27'$; quod cadit intra dies octavam, & nonam Octobris, & tertiam quartamve Martii.

Pro duratione minimi Crepuſculi habetur

log. ſin. $\frac{1}{2}$ *a*	. . . .	9, 1943324
log. cos. l	. . . .	9, 8480909
$log. \frac{ſin. \frac{1}{2} a}{cos. l} = ſin. (h - h')$	. .	9, 3462415

Propterea $\frac{1}{2}(h - h') = 12.° 49'. 24''$, ſive $h - h' = 25.° 38'. 48''$; quod praebet $1.^h 42.^m 35.^s$ temporis ſiderei, ſeu $1.^h 41.^m 18.^s$ temporis ſolaris medii.

DISQUISITIO VI.

DE ASTRONOMIAE NAUTICAE THEOREMATIBUS.

1. VUlgatiſſimus MAUPERTUISII Liber *De Nautica Aſtronomia* Problematum utilitate & praeſtantia, argumenti novitate, ſolutionum brevitate & elegantia, ac denique nativa quadam geometrica venuſtate, quae MAUPERTUISIUM ſcribentem nunquam deſtituit, omnium Geometrarum promeruit ſuffragia. Verum elegantiſſimus Auctor praejudicata opinione adverſus Trigonometriam Sphaericam occupatus ejus uſum ſibi penitus interdixit, eoque inconſiderantiae proceſſit, ut vix ſibi temperaverit quominus illam Geometris, atque ipſis, ſi diis placet, Aſtronomis inutilem ac ſupervacaneam pronunciaret. *Pour réſoudre* (inquit in operis praefatione) *les Problemès Aſtronomiques, on a d' ordinaire recours à une Science ſecondaire: on les reduit à des triangles tracés ſur la ſurface de la Sphére, que cette Science apprend à réſoudre. Je parle de la Trigonométrie Sphérique: elle offre d' abord de grandes facilités. On trouve*

ſes régles à la tête de pluſieurs Livres : & ſouvent on réſout des queſtions importantes de l' Aſtronomie par une application aveugle de ces régles. Par elles on eſt diſpenſé de pénétrer dans la nature de la queſtion; & par elles l' Aſtronome ſe croiroit diſpenſé d' être Géomètre, s' il pouvoit méconnoitre la Science à la quelle elles doivent leur origine. J' admire l' Art des prémiers Géomètres qui nous ont donné la Trigonométrie Sphérique: mais je crois que les Eſprits géométriques préféreront, pour les Problèmes d' Aſtronomie, des ſolutions immédiates à celles qu' on emprunte d' une autre Science; & aux quelles on ne parvient qu' en pratiquant des régles dont l' origine n'eſt guére préſente à l' eſprit, & dont l' application eſt ſouvent ambigue. J' ai voulu délivrer l' Aſtronomie du béſoin de cette Science ſecondaire; & la faire dépendre immédiatement de l' analyſe dont toutes les Sciences Mathématiques dépendent. Quaſi vero Trigonometriam Sphaericam Analyſis excluderet, vel componi cum illa non poſſet: quaſi tam multorum Problematum Aſtronomicorum analyticae ſolutiones a Trigonometria Sphaerica non eſſent depromptae: quaſi denique ſummorum Geometrarum opera, potiſſimum Aſtronomica hujus Trigonometriae Dictatis non niterentur. Hinc non immerito MAUPERTUISIUM reprehendit PEZENAS (*a*) conſulte

(a) *Aſtronomie des Marins, Pref.*

inquiens: *Je ne vois pas trop ſur quels principes Mr. MAUPERTUIS nous dit dans ſa Préface que la Trigonométrie Sphérique eſt une Science ſecondaire dans la réſolution des Problèmes Aſtronomiques. Je ſoutiens au contraire, que c' eſt la Science la plus directe; puiſque les Problèmes Aſtronomiques ne ſont eux mêmes que des triangles Sphériques, dont on cherche les angles ou les côtés.*

2. Quum itaque ingenii exercendi gratia Aſtronomiae Nauticae Problemata ad Sphaericam Trigonometriam revocare, eorumque analyticas ſolutiones ex ejus Trigonometriae principiis derivare aggreſſus eſſem, tam ex voto res ceſſit, ut ex binis tantum ſimpliciſſimis Sphaericorum triangulorum proprietatibus utiliora quaeque ac praecipua Nauticae Aſtronomiae Theoremata praeter ſpem mihi inferre contigerit adhibitis ad hanc rem ſpeciebus ſinuum & coſinuum Eulerianis ad imaginationem & memoriam juvandam aptiſſimis, ablegatiſque ſymbolis Maupertuiſianis valde incommodis & moleſtis. Binae autem illae triangulorum ſphaericorum proprietates, ex quibus Nauticae Aſtronomiae partem maximam intuli, ad Lemmata duo ſequentia referuntur:

LEMMA I.

3. IN Triangulo quovis Sphaerico coſinus lateris unius cujuslibet aequatur facto ex ſinubus laterum reliquorum ducto in coſinum anguli ab hiſce comprehenſi, nec non facto ex coſinubus laterum eorundem.

LEMMA II.

4. IN Triangulo Sphaerico quocumque ſinus angulorum ſe habent ut ſinus laterum oppoſitorum.

Fig. 1. 5. Sit jam in Triangulo Sphaerico *PZS*, *P* Polus, *Z* Loci Zenit, *S* Sol vel Aſtrum quodcumque. Hic ponimus, verſari Aſtrum in Hemiſphaerio Poli elevati; levis quippe algebraici ſigni mutatio ipſum transferet quoties libuerit in Hemiſphaerium Poli depreſſi.

Quamobrem arcus *PZ* erit complementum latitudinis Loci, arcus *ZS* complementum altitudinis Aſtri ſupra Horizontem, arcus *PS* complementum ejus declinationis; demum angulus *ZPS* erit angulus Horarius, & angulus *PZS* angulus Azimuthalis. Conſtat

autem, Aſtronomiam Nauticam fere univerſam in hiſce quinque niti elementis, Latitudine Loci, Altitudine Aſtri ſupra Horizontem, ejus Declinatione, Angulo Horario, Angulo Azimuthali.

6. Dicatur igitur.

Loci Latitudo . . . . $= l$

Aſtri ſupra Horizontem Altitudo . . $= a$

Aſtri Declinatio . . . . $= d$

Angulus Horarius . . . . $= h$

Angulus Azimuthalis . . . . $= z$

Hinc vero colligitur

$$ZPS = h$$
$$PZS = z$$
$$\sin. PZ = \cos. l$$
$$\sin. ZS = \cos. a$$
$$\sin. PS = \cos. d$$
$$\cos. PZ = \sin. l$$
$$\cos. ZS = \sin. a$$
$$\cos. PS = \sin. d$$

7. Ex quinque jam Elementis a, d, h, l, z quinque oriuntur quaterniones, nimirum

I.

a, d, h, l

II.

a, d, l, z

III.

a, d, h, z

IV.

d, h, l, z

V.

a, h, l, z

horumque ſinguli Theoremata quatuor praebent diverſa.

---

8. Sit igitur quaternio primus.

I.

a, d, h, l

Ex hoc ſequentia quatuor Theoremata deducuntur:

THEOREMA I.

$$\text{Sin.}\ a = \cos.\ l \cos.\ d \cos.\ h + \text{ſin.}\ l.\ \text{ſin}\ d.$$

Dem. Per Lemma I. eſt $\cos.\ ZS = \text{ſin.}\ PZ \times \text{ſin.}\ PS \cos.\ ZPS + \cos.\ PZ \cos.\ PS$ Ergo &c. *Q.E.D.*

THEOREMA II.

$$\text{Cos.}\ h = \frac{\text{ſin.}\ a - \text{ſin.}\ l.\ \text{ſin.}\ d}{\cos.\ l \cos.\ d}.$$

Dem. Liquet ex ſimplici reductione formulae Theorematis I. *Q.E.D.*

---

9. ## THEOREMA III.

$$\text{Sin.}\ l = \frac{\text{ſin.}a\,\text{ſin.}d \pm \cos.d \cos.h \sqrt{(\text{ſin.}^2 d - \text{ſin.}^2 a + \cos.^2 d \cos.^2 h)}}{\text{ſin.}^2 d + \cos.^2 d \cos.^2 h}.$$

I 2

Dem. In formula primi Theorematis subrogatur $\sqrt{(1 - \sin.^2 l)}$ loco $\cos. l$, & ſublata irrationalitate habetur aequatio quadratica, cujus radix eſt $\sin. l = $ &c. *Q. E. D.*

10. ## THEOREMA IV.

$$\sin. d = \frac{\sin. a \sin. l \pm \cos. l \cos. h \sqrt{(\sin.^2 l - \sin.^2 a + \cos.^2 l \cos.^2 h)}}{\sin.^2 l + \cos.^2 l . \cos.^2 h}.$$

Dem. Eodem modo ac Theorema III. *Q. E. D.*

11. Sit modo quaternio ſecundus

I I.

$a,\ d,\ l,\ z$

Inde eruuntur Theoremata quatuor ſequentia

THEOREMA V.

$$\sin. d = \cos. l \cos. a \cos. z + \sin. l \sin. a.$$

Dem. Par eſt ratiocinatio ac Theorematis I. *Q. E. D.*

THEOREMA VI.

$$\cos. z = \frac{\sin. d - \sin. l \sin. a}{\cos. l \cos. a}.$$

Dem. Conſectarium eſt Theorematis V. *Q. E. D.*

12. ## THEOREMA VII.

$$\sin. l = \frac{\sin. d \sin. a \pm \cos. a \cos. z \sqrt{(\sin.^2 a - \sin.^2 d + \cos.^2 a \cos.^2 z)}}{\sin.^2 a + \cos.^2 a \cos.^2 z}$$

Dem. Facta ſubſtitutione quantitatis $\sqrt{(1 - \sin.^2 l)}$ pro $\cos. l$ in formula Theorematis V., ſublataque porro aſymmetria, oritur aequatio ſecundi gradus, cujus invenitur radix $\sin. l = $ &c. *Q. E. D.*

13. ## THEOREMA VIII.

$$\sin. a = \frac{\sin. d \sin. l \pm \cos. l \cos. z \sqrt{(\sin.^2 l - \sin.^2 d + \cos.^2 l \cos.^2 z)}}{\sin.^2 l + \cos.^2 l \cos.^2 z}$$

Dem. Eadem quae Theorematis VII. *Q. E. D.*

14. Sequitur quaternio tertius.

I I I.

a, d, h, z

Et ex hoc Theoremata alia quatuor.

THEOREMA IX.

$$\text{Sin. } z = \frac{\text{sin. } h.\ \text{cos. } d}{\text{cos. } a}.$$

Dem. Per Lemma II. *sin.* z : *sin.* h : : *sin. PS* : *sin ZS* : : *cos.* d : *cos.* a. Ergo &c. *Q. E. D.*

15. ## THEOREMA X.

$$\text{Sin. } h = \frac{\text{sin. } z\ \text{cos. } a}{\text{cos. } d}.$$

Dem. Ex praecedenti. *Q. E. D.*

16. ## THEOREMA XI.

$$\text{Cos. } d = \frac{\text{sin. } z\ \text{cos. } a}{\text{sin. } h}.$$

Dem. Uti prius. *Q. E. D.*

17. ## THEOREMA XII.

$$\text{Cos. } a = \frac{\text{sin. } h.\ \text{cos. } d}{\text{sin. } z}.$$

Dem. Ut supra. *Q. E. D.*

18. Pervenimus nunc ad quartum quaternionem.

I V.

d, h, l, z

unde quatuor alia Theoremata colliguntur.

THEOREMA XIII.

$$Sin. z = \frac{sin. h. cos. d.}{\sqrt{(1 - (cos. l\, cos. d.\, cos. h + sin. l\, sin. d)^2)}}.$$

Dem. In formula Theorematis IX. ſubſtituitur pro *cos. a* ejus valor ex Theoremate I. deductus, atque inde oritur *ſin. z* = &c. *Q. E. D.*

19. # THEOREMA XIV.

$$Cos. h = \frac{A \pm \sqrt{(A^2 + BC)}}{B},$$ facto ſcilicet

$A = sin. l\; cos. l\; sin. d\; cos. d\; sin.^2 z$

$B = cos.^2 d - cos.^2 d\; cos.^2 l\; sin.^2 z$

$C = cos.^2 d + sin.^2 l\; sin.^2 z\; sin.^2 d - sin.^2 z$

Dem. In formula Theorematis X. pro *ſin. h* ſubrogatur $\sqrt{(1 - cos.^2 h)}$, & pro *cos. a* valor ipſius ex Theoremate I. Tum ſublata irrationalitate naſcitur quadratica aequatio, cujus radix eſt *cos. h* = &c. *Q. E. D.*

20. # THEOREMA XV.

$$Cos. d = \sqrt{\left(\frac{D \pm \sqrt{(D^2 - FE)}}{F}\right)},$$ aſſumpto

ſcilicet

$D = 2\, sin.^4 z\; sin.^2 l\; cos.^2 l\; cos.^2 h + sin.^4 z\; cos.^4 l\; cos.^2 h$

$+ sin.^2 z\; sin.^2 h\; cos.^2 l - sin.^4 z\; sin.^2 l\; cos.^2 l$

$E = sin.^4 z\; cos.^4 l$

$F = 4\, sin.^4 z\; sin.^2 l\; cos.^2 l\; cos.^2 h$

$+ (sin.^2 h + sin.^2 z\; cos.^2 l\; cos.^2 h - sin.^2 z\; sin.^2 l)^2.$

Dem. In formula Theorematis XI. pro *cos. a* ponitur ipſius valor ex Theoremate I. eliciendus; tum aufertur asymmetria, & occurrit factum *cos. d ſin. d*, hoc eſt $cos. d \sqrt{(1 - cos.^2 d)}$: eliminatur iterum asymmetria, oriturque tandem aequatio *derivativa* quarti gradus, cujus radix eſt *cos. d* = &c. *Q. E. D.*

21. # THEOREMA XVI.

$$sin. l = \frac{\pm sin. h\, cos. h\, cos. z\, cos.^2 d + sin. d \sqrt{(sin.^2 z - sin.^2 h\, cos.^2 d)}}{sin. z\; sin.^2 d + sin. z\; cos.^2 d\; cos.^2 h.}.$$

Dem. In formula Theorematis III. ſubſtituitur pro $sin.\, a$, & $sin.^2\, a$ eorum valor ex Theoremate XII. eruendus. *Q. E. D.*

22. Sequitur poſtremo quintus quaternio.

V.

a, h, l, z

& ex hoc alia quatuor Theoremata.

THEOREMA XVII.

$$Sin.\, h = \frac{sin.\, z\ cos.\, a}{\sqrt{[1 - (cos.\, l\ cos.\, a\ cos.\, z + sin.\, l\ sin.\, a)^2]}}.$$

Dem. In formula Theorematis X. ponitur pro $cos.\, d$ ejus valor ex Theoremate V. eliciendus. *Q. E. D.*

23.
THEOREMA XVIII.

$$Cos.\, z = \frac{G \pm \sqrt{(G^2 + HI)}}{H},$$ aſſumpto ſcilicet

$$G = sin.\, l\ cos.\, l\ sin.\, a\ cos.\, a\ sin.^2\, h$$

$$H = cos.^2\, a - sin.^2 h\ cos.^2\, l\ cos.^2\, a$$

$$I = sin.^2\, h\ sin.^2\, l\ sin.^2\, a + cos.^2\, a - sin.^2\, h$$

Dem. Eliminata irrationalitate a formula Theorematis praecedentis, poſitoque $1 - cos.^2\, z$ pro $sin.^2\, z$ obtinetur quadratica aequatio, quae radicem habet $cos.\, z$ = &c. *Q. E. D.*

24.
THEOREMA XIX.

$$Cos.\, a = \sqrt{\left(\frac{K \pm \sqrt{(K^2 - LM)}}{L}\right)},$$ aſſumpto

videlicet

$$K = cos.^2\, l\ cos.^2\, z\ sin.^4\, h + cos.^2\, l\ sin.^2\, z\ sin.^2\, h$$
$$- sin.^2\, z\ sin.^2\, l\ cos.^2\, l\ sin.^4\, h$$

$$L = 4\, sin.^2 l\ cos.^2 l\ cos.^2\, z\ sin.^4 h$$
$$+ (sin.^2 z + cos.^2 z\ sin.^2\, h\ cos.^2\, l - sin.^2\, h\ sin.^2\, l)^2$$

$$M = sin.^4\, h\ cos.^4\, l$$

Dem. Tollitur asymmetria in formula Theorematis XVII., tum substituitur $\sqrt{(1 - cos.^2 a)}$ loco *sin. a*, ac tollitur iterum asymmetria. Inde oritur aequatio *derivativa* quarti gradus, cujus radix praebet $cos. a = $ &c. Q.E.D.

25. THEOREMA XX.

$$Sin. l = \frac{1}{P} \sqrt{\left(N \pm \sqrt{(N^2 - P^2 Q^2)}\right)},$$ posito nimirum

$$N = 2\, sin.^2 a\, cos.^2 a\, cos.^2 z\, sin.^4 h$$
$$- (sin.^2 h\, sin.^2 a - sin.^2 h\, cos.^2 z\, cos.^2 a) \times$$
$$(sin.^2 z\, cos.^2 a + sin.^2 h\, cos.^2 z\, cos.^2 a - sin.^2 h)$$
$$P = sin.^2 h\, sin.^2 a + sin.^2 h\, cos.^2 z\, cos.^2 a$$
$$Q = sin.^2 z\, cos.^2 a + sin.^2 h\, cos.^2 z\, cos.^2 a - sin.^2 h.$$

Dem. A formula Theorematis XVII. eliminatur irrationalitas, deinde loco *cos. l* subrogatur ejus valor $\sqrt{(1 - sin.^2 l)}$, ac rursus tollitur irrationalitas. Hoc facto prodit aequatio *derivativa* quarti gradus, hujusque radix dat $sin.\ l = $ &c. Q.E.D.

26. Evolutis Theorematis omnibus, quae ex varia quinque elementorum a, d, h, l, z combinatione derivantur, duodecim alia possunt ex praecedentibus colligi, eaque longe simpliciora ac fortassis utiliora, si ponamus versari Astrum in Horizonte; seu nullam esse ipsius altitudinem, qua in hypothesi horarius angulus h tempus indicat ab Astro insumptum in ascensu ab Horizonte ad Meridianum, diciturque iccirco arcus semidiurnus, magni apud Astronomos usus. Denotante jam igitur h arcum hujusmodi semidiurnum, factaque $a = 0$, ex praecedentibus quaternionibus quatuor isti

a, d, h, l

a, d, l, z

a, d, h, z

a, h, l, z

degenerant in terniones

I.

d, h, l

II.

d, l, z

III.

d, h, z

IV.

h, l, z

Quorum finguli tria praebent Theoremata. Sit igitur ternio primus.

I.

d, h, l

Ex hoc tria fequentia Theoremata derivantur.

THEOREMA XXIX. &c.

THEOREMA XXI.

$$\text{Cos.}\,h = -\,\text{tang.}\,l\ \text{tang.}\,d.$$

Dem. In hac hypothefi formula Theorematis I. mutatur in $\cos.l\ \cos.d\ \cos.h + \sin.l\ \sin.d = 0$. Hinc fit

$$\cos.h = -\frac{\sin.l\ \sin.d}{\cos.l\ \cos.d} = -\,\text{tang.}\,l\ \text{tang.}\,d.\ Q.E.D.$$

27. THEOREMA XXII.

$$\text{Tang.}\,l = -\frac{\cos.h}{\text{tang.}\,d}.$$

Dem. Patet ex praecedenti. *Q.E.D.*

28. THEOREMA XXIII.

$$\text{Tang.}\,d = -\frac{\cos.h}{\text{tang.}\,l}.$$

Dem. Eadem. *Q.E.D.*

29. Sequitur ternio ſecundus.

I I.

d, l, z

Huic reſpondent tria iſthaec Theoremata:

THEOREMATA XXIV.

$$Cos.\,z = \frac{ſin.\,d}{cos.\,l}.$$

Dem. Formula Theorematis VI. in hanc mutatur, facto $ſin.\,a = 0$, & $cos.\,a = 1$. *Q.E.D.*

30. THEOREMA XXV.

$$Sin.\,d = cos.\,l\;cos.\,z$$

Dem. liquet ex praecedenti. *Q.E.D.*

31. THEOREMA XXVI.

$$Cos.\,l = \frac{ſin.\,d}{cos.\,z}.$$

Dem. Eadem. *Q.E.D*

32. Ternio tertius

I I I.

d, h, z

tria haec parit Theoremata:

THEOREMA XXVII.

$$Sin.\,z = ſin.\,h\;cos.\,d.$$

Dem. Patet ex formula Theorematis IX. *Q.E.D.*

33. ## THEOREMA XXVIII.

$$\sin. h = \frac{\sin. z}{\cos. d}.$$

Dem. Ex praecedenti. *Q. E. D.*

34. ## THEOREMA XXIX.

$$\operatorname{Cos}. d = \frac{\sin. z}{\sin. h}.$$

Dem. Ut supra. *Q. E. D.*

35. Denique ex Ternione quarto

IV.

h, l, z

alia haec tria deducuntur Theoremata:

THEOREMA XXX.

$$\operatorname{Tang}. h = \frac{\tan g. z}{\sin. l}.$$

Dem. Ex transformatione formulae Theorematis XVII. oritur

$$\sin. h = \frac{\sin. z}{\sqrt{(1 - \cos.^2 l \cos.^2 z)}}.$$ Ergo &c. *Q.E.D.*

36. ## THEOREMA XXXI.

$$\operatorname{Sin}. l = \frac{\tan g. z}{\tan g. h}.$$

Dem. Patet ex reductione formulae praecedentis. *Q.E.D.*

37. ## THEOREMA XXXII.

Tang. $z = $ *sin.* l *tang.* h.

Dem. Liquet ex praecedenti. *Q.E.D.*

DISQUISITIO VII.

DE COMETARUM MOTU.

1. Postquam diurnae Parallaxeos defectus, vel minima prorsus magnitudo Cometas extulit supra regiones sublunares, annua vero Parallaxis ostendit eorundem in regiones Planetarum descensum, illud statim ex Newtonianae Philosophiae dictatis occurrit & communi Astronomorum suffragio firmatum est, Cometas omnes Planetarum instar ferri in orbibus ellipticis circa Solem in communi orbium umbilico positum, urgentemque momentis singulis Planetas omnes & Cometas praepotenti attractionis vi, quae in ratione duplicata reciproca distantiarum a Sole augeatur. Verum ea intercedit inter orbes Planetarum & Cometarum dissimilitudo, ut illi ellipses quidem sint, sed ad circulos proxime accedant, isti vero ellipses sint acutissimae ac multum excentricae, habentes nimirum conjugatorum axium alterum longissimum, alterum brevissimum. Discrimen hoc a projectionis velocitate proficisci docet Newtoniana Philosophia: quum enim ad descriptionem circuli ea postuletur projectionis velocitas,

quae requiritur ut corpus ad duplam altitudinem seu distantiam a centro possit ascendere, & ad descriptionem ellipseos opus sit, ut projectionis velocitas in quavis altitudine se habeat ad velocitatem in circulo in eadem altitudine in minori ratione quam radix binarii ad unitatem, ad describendam vero parabolam celeritatem projectionis in quavis altitudine talem esse oporteat, quae ad celeritatem in circulo in eadem altitudine rationem habeat omnino eandem quam binarii radix ad unitatem; inde consequitur, Planetas ab initio projectos fuisse impetu parum ab illo diverso quocum ad duplam altitudinem potuissent pervenire, Cometas vero eam accepisse projectilem celeritatem, quae ad celeritatem in circulo in pari altitudine rationem habeat vix minorem, quam radix numeri binarii ad unitatem. Quo sane factum est, ut elliptici Planetarum orbes ferme circulares evaderent, orbesque Cometarum in Solis vicinia vix a parabolicis differrent. Quum itaque Cometae cujuslibet semita saltem prope Solem, sive apsidem imam sit ad sensum parabolica, commodissima hinc patuit Astronomis via in Cometarum motibus supputandis, ut scilicet neglecta ellipsi, quae ob inextricabiles calculos non aliter esset quam herculeo labore tractabilis, parabolam excolerent, cujus tetragonismus jam inde ab Archimedis aetate Geometris

perspectus & obvius Cometarum loca ad tempus datum labore non ita immani, nec prorsus ingrato suppeditat.

2. Jam vero in definiendis Cometae elementis illud occurrit praecipuum, ut cognito angulo, quem rectae a duobus Cometae locis ad centrum Solis ductae comprehendunt, cognitaque earundem rectarum, seu radiorum vectorum magnitudine quamproxime, inveniatur distantia Cometae perihelia, hoc est distantia foci a parabolae vertice, nec non positio axis, ipsaque iccirco parabola delineari possit, & graphice repraesentari. Ad hoc praestandum expedita mihi se obtulit methodus, quae cum differat ab aliis, & simplicitate atque elegantia se commendet, aequiorum Geometrarum non detrectat judicium.

3. Sit itaque CPM orbis parabolici pars in Solis vicinia, & ex binis Cometae locis C, M junguntur ad Solis centrum S in orbis umbilico constitutum radii vectores CS, SM datum angulum CSM comprehendentes, notaque praeterea sit radiorum CS, SM magnitudo saltem vero proxima: quaeritur distantia perihelia SP, & positio axis QP. Fiat Fig. 5.

$$CS = a,$$
$$MS = b,$$
$$SP = p,$$
$$\text{angulus } CSM = \varphi,$$

$$CSP = x,$$
$$PSM = \varphi - x.$$

Ductis ordinatis CD, ME habetur $SE = b\ cos.(\varphi - x)$, $SD = a\ cos.x$, $ME^2 = 4p.\ PE = 4p.\ (SP - SE) = 4p^2 - 4pb\ cos.(\varphi - x)$, $CD^2 = 4p.\ DP = 4p.\ (SP - SD) = 4p^2 - 4pa\ cos.x$. Igitur $SM^2 = b^2 = 4p^2 - 4pb\ cos.(\varphi - x) + b^2\ cos.^2(\varphi - x)$, & $SC^2 = a^2 = 4p^2 - 4pa\ cos.x + a^2\ cos.^2 x$; eductaque radice prodibit $b = 2p - b\ cos.(\varphi - x)$, $a = 2p - a\ cos.x$. Dempta harum aequationum prima ab altera oritur $b\ cos.(\varphi - x) - a\ cos.x = a - b$, hoc eſt $(b\ cos.\varphi - a)\ cos.x + b\ ſin.\varphi\ ſin.x = a - b$, vel $(b\ cos.\varphi - a)\ cos.x + b - a = -b\ ſin.\varphi \sqrt{(1 - cos.^2 x)}$, & quadrando $(b\ cos.\varphi - a)^2\ cos.^2 x + 2(b - a) \times (b\ cos.\varphi - a)\ cos.x + (b - a)^2 = b^2\ ſin.^2\varphi - b^2\ ſin.^2\varphi\ cos.^2 x$, & factis reductionibus, expurgataque de more aequatione invenitur $cos.^2 x$

$$+ \frac{2(b-a)(b\ cos.\varphi - a)\ cos.x}{b^2 - 2ab\ cos.\varphi + a^2} + \frac{b^2\ cos.^2\varphi - 2ab + a^2}{b^2 - 2ab\ cos.\varphi + a^2} = 0.$$

Igitur $cos.x = \dfrac{(a-b)(b\ cos.\varphi - a)}{b^2 - 2ab\ cos.\varphi + a^2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{A^2}{B^2} - \dfrac{C}{B}\right)}$, facta ſcilicet

$A = (a - b)(b\ cos.\varphi - a)$,
$B = b^2 - 2ab\ cos.\varphi + a^2$, &
$C = b^2\ cos.^2\varphi - 2ab + a^2$.

Subducto porro calculo deprehenditur $\dfrac{A^2}{B^2} - \dfrac{B}{C}$

$$= \frac{A^2 - CB}{B^2} = \frac{2ab^3(1 - cos.\varphi\ ſin.^2\varphi - cos.^2\varphi)}{b^2 - 2ab\ cos.\varphi + a^2};$$

proindeque ſupereſt $cos.\ x$

$$= \frac{(a-b)(b\ cos.\varphi - a) \pm \sqrt{2ab^3(1 - cos.\varphi\ ſin.^2\varphi - cos.^2\varphi)}}{b^2 - 2ab\ cos.\varphi + a^2};$$

quae ſane expreſſio quaeſiti anguli x, ſeu CSP quantitatem exhibet, & conſequenter axis PQ poſitionem definit. Diſtantia autem perihelia p, ſeu quarta parametri pars obtinetur ex ſuperiori aequalitate $a = 2p - a\ cos.\ x$, habeturque $p = \frac{1}{2} a\ (1 + cos.\ x)$, & poſt idoneas reductiones p

$$= \frac{\frac{1}{2}a(ab + b^2)(1 - cos.\varphi) \pm \frac{1}{2}a\sqrt{2ab^3(1 - cos.\varphi\ ſin.^2\varphi - cos.^2\varphi)}}{b^2 - 2ab\ cos.\varphi + a^2}$$

$$= \frac{a(ab + b^2)\ ſin.^2 \tfrac{1}{2}\varphi \pm \frac{1}{2}a\sqrt{2ab^3(1 - cos.\varphi\ ſin.^2\varphi - cos.^2\varphi)}}{b^2 - 2ab\ cos.\varphi + a^2}.$$

4. Deſignet jam unitas, ut exemplo res illuſtretur, diſtantiam Terrae mediocrem a Sole, ſitque porro

b	. . . .	$= 4,6893$
a	. . . .	$= 4,5634$
$a - b$	. . . .	$= -0,1259$

φ	$= 87^\circ$
$log.\ b$	$= 0,\ 6711080$
$log.\ a$	$= 0,\ 6592885$
$log.\ cos.\ \varphi$	$= 8,\ 7188002$
$log.\ b\ cos.\ \varphi$	$= 9,\ 3899082$
$b\ cos.\ \varphi$	$= 0,\ 2454$
$b.\ cos.\ \varphi - a$	$= -4,\ 3180$
$log. -(b\ cos.\ \varphi - a)$	$= 0,\ 6352826$
$log. -(a - b)$	$= 9,\ 1000257$
$log.\ (a-b)\ (b\ cos.\ \varphi - a)$	$= 9,\ 7353083$
$(a-b)\ (b\ cos.\ \varphi - a)$	$= 0,\ 5436$
$log.\ sin.\ \varphi$	$= 9,\ 9994044$
$log.\ sin.^2\ \varphi$	$= 9,\ 9988088$
$log.\ cos.\ \varphi$	$= 8,\ 7188002$
$log.\ cos.\ \varphi\ sin.^2\ \varphi$	$= 8,\ 7176090$
$cos.\ \varphi\ sin.^2\ \varphi$	$= 0,\ 05219$
$log.\ cos.^2\ \varphi$	$= 7,\ 4376004$
$cos.^2\ \varphi$	$= 0,\ 002739$
$cos.\ \varphi\ sin.^2\ \varphi + cos.^2\ \varphi$	$= 0,\ 05493$

$1 - cos.\ \varphi\ sin.^2\ \varphi - cos.^2\ \varphi$	$= 0,\ 94507$
$log.\ 2$	$= 0,\ 3010300$
$log.\ a$	$= 0,\ 6592885$
$log.\ b^3$	$= 2,\ 0133240$
$log.\ 2ab^3$	$= 2,\ 9736425$
$log.\ (1 - cos.\ \varphi\ sin.^2\ \varphi - cos.^2\ \varphi)$	$= 9,\ 9754640$
$log.\ 2ab^3\ (1 - cos.\ \varphi\ sin.^2\ \varphi - cos.^2\ \varphi)$	$= 2,\ 9491065$
$log. \sqrt{2ab^3\ (1 - cos.\ \varphi\ sin.^2\ \varphi - cos.^2\ \varphi)}$	$= 1,\ 4745532$
$\sqrt{2ab^3\ (1 - cos.\ \varphi\ sin.^2\ \varphi - cos.^2\ \varphi)}$	$= 29,\ 82$
$(a-b)\ (b\ cos.\ \varphi - a) + \sqrt{[2ab^3 \times (1 - cos.\ \varphi\ sin.^2\ \varphi - cos.^2\ \varphi)]}$	$= 30,\ 3636$
$(a-b)\ (b\ cos.\ \varphi - a) - \sqrt{[2ab^3 \times (1 - cos.\ \varphi\ sin.^2\ \varphi - cos.^2\ \varphi)]}$	$= -29,\ 2764$
$log.[(a-b)(b\ cos.\ \varphi - a) + \sqrt{[2ab^3 \times (1 - cos.\ \varphi\ sin.^2\ \varphi - cos.^2\ \varphi)]}]$	$= 1,\ 4823590$
$log.\ b^2$	$= 1,\ 3422160$
$log.\ a^2$	$= 1,\ 3185770$
b^2	$= 21,\ 99$
a^2	$= 20,\ 82$

$a^2 + b^2$	$= 42, 81$
$log.\ b\ cos.\ \varphi$	$= 9, 3899082$
$log.\ a$	$= 0, 6592885$
$log.\ 2$	$= 0, 3010300$
$log.\ 2ab\ cos.\ \varphi$	$= 0, 3502267$
$2ab\ cos.\ \varphi$	$= 2, 24$
$a^2 + b^2 - 2ab\ cos.\ \varphi$	$= 40, 57$
$log.(a^2 + b^2 - 2ab\ cos.\ \varphi)$ . . .	$= 1, 6082050$

$$log.\ \frac{(a-b)(b\ cos.\varphi - a) + \sqrt{2ab^3(1 - cos.\varphi\, sin.^2\varphi - cos.^2\varphi)}}{(a^2 + b^2 - 2ab\ cos.\ \varphi)}$$

$=$ . . . . $= 9, 8741540$

Igitur angulus x, seu $CSP = 41°.\ 32'.\ 42''$, & $PSM = 45°.\ 27'.\ 18''$.

5. Inventis porro angulis x, & $\varphi - x$, hoc eſt veris Cometae anomaliis, ſtatim invenitur diſtantia Cometae perihelia p, ſeu PS ex formula $p = \frac{1}{2} a \times (1 + cos.x)$:

$cos.\ x$	$0, 7484351$
$cos.\ x + 1$	$1, 7484351$
$log.\ (cos.\ x + 1)$	$0, 2426495$
$log.\ \frac{1}{2}\ a$	$0, 3582585$

$log.\ \frac{1}{2}\ a\ (cos.x + 1)$	$0, 6009080$
$\frac{1}{2}\ a\ (cos.x + 1)$	$3, 9894$

Eſt ergo diſtantia perihelia quaeſita 3, 9894, hoc eſt fere quadrupla diſtantiae Telluris a Sole.

6. Si in expreſſionem $cos.\ x$ §. 3. introducatur ſinus verſus anguli φ, nimirum $ver.\ \varphi$, ea valde contrahitur, ac formam ſimpliciorem adipiſcitur: quum enim ſit $1 - cos.\varphi\ sin.^2\varphi - cos.^2\varphi = 1 - cos.\varphi + cos.^3\varphi - cos.^2\varphi = 1 - cos.\ \varphi - cos.^2\varphi\ (1 - cos.\ \varphi) = ver.\ \varphi - ver.\ \varphi\ cos.^2\varphi = ver.\ \varphi\ sin.^2\varphi$, fit ideo

$$cos.x = \frac{(a-b)(b\ cos.\varphi - a) \pm \sqrt{2ab^3(1 - cos.\varphi\, sin.^2\varphi - cos.^2\varphi)}}{b^2 - 2ab\ cos.\varphi + a^2}$$

$$= \frac{(a-b)(b\ cos.\varphi - a) \pm b\, sin.\varphi \sqrt{2ab\ ver.\varphi}}{b^2 - 2ab\ cos.\varphi + a^2}$$

7. Detegitur eodem artificio diſtantia perihelia p

$$= \frac{a\,(ab + b^2)\, sin.^2 \tfrac{1}{2}\varphi \pm \tfrac{1}{2}\, ab\, sin.\varphi \sqrt{2ab\ ver.\varphi}}{b^2 - 2ab\ cos.\varphi + a^2},$$ quae

ſupputari haud moleſte poteſt etiam ante initam ſupputationem anguli x. Fit nempe

$log.\ a$	$0, 6592885$
$log.\ b$	$0, 6711080$
$log.\ ab$	$1, 3303965$

ab	21, 3991
$log.\ b^2$	1, 3422160
b^2	21, 98953
$ab + b^2$	43, 38863
$log.\ (ab + b^2)$	1, 6373759
$log.\ fin.\ \frac{1}{2}\varphi$	9, 8378122
$log.\ fin.^2\ \frac{1}{2}\varphi$	9, 6756244
$log.\ a\,(ab + b^2)\,fin.^2\ \frac{1}{2}\varphi$	1, 9722888
$a\,(ab + b^2)\,fin.^2\ \frac{1}{2}\varphi$	93, 8185
$log.\ 2a$	0, 9603185
$log.\ b$	0, 6711080
$log.\ ver.\ \varphi$	9, 9766544
$log.\ 2ab\ ver.\ \varphi$	1, 6080809
$log.\ \sqrt{2ab\ ver.\ \varphi}$	0, 8040404
$log.\ fin.\ \varphi$	9, 9994044
$log.\ \frac{1}{2}\ ab$	1, 0293665
$log.\ \frac{1}{2}ab\,fin.\,\varphi\sqrt{2ab\ ver.\,\varphi}$	1, 8328113
$\frac{1}{2}\ ab\,fin.\,\varphi\sqrt{2ab\ ver.\,\varphi}$	68, 0473
$a(ab+b^2)\,fin.^2\,\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}ab\,fin.\,\varphi\sqrt{2ab\,ver.\,\varphi}$ . .	161, 8658

$log.\,(a\,(ab + b^2)\,fin.^2\,\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\,ab\,fin.\,\varphi\,\times$

$\sqrt{2ab\,ver.\,\varphi})$ 2, 2091550

$log.\,(a^2 + b^2 - 2ab\,cos.\,\varphi)$ . . . 1, 6082050

$$log.\ \frac{a\,fin.^2\,\frac{1}{2}\varphi\,(ab + b^2) + \frac{1}{2}\,ab\,fin.\,\varphi\sqrt{2ab\ ver.\,\varphi}}{(a^2 + b^2 - 2ab\,cos.\,\phi)}$$

$=$ 0, 6009500

Igitur $p = 3, 9898$, quod non differt nisi 0, 0004 a praecedenti.

8. Definitis jam verarum anomaliarum angulis & distantia Cometae perihelia, haud difficulter definiri poterit tempus, quod in percurrendo arcu MC a datis radiis vectoribus MS, SC comprehenso Cometa absumit. Fiat enimvero anomalia vera $CSP = \lambda$, altera $PSM = \omega$. Hinc nanciscimur

$$CD = a\ fin.\,\lambda \qquad ME = b\ fin.\ \omega$$

$$SD = a\ cos.\,\lambda \qquad SE = b\ cos.\ \omega$$

$$PD = \frac{a^2\,fin.^2\,\lambda}{4p} \qquad PE = \frac{b^2\,fin.^2\,\omega}{4p}$$

Est autem Spatium Parabolicum $PME = \frac{b^3\ fin.^3\ \omega}{6p}$,

& $CPD = \frac{a^3\ fin^3\ \lambda}{6p}$: rursus triangulum SEM

$= \frac{b^2 \, \sin.\omega \, \cos.\omega}{2}$, & triangulum $CSD = \frac{a^2 \, \sin.\lambda \, \cos.\lambda}{2}$.
Igitur erit Sector Parabolicus ***CPMS***

$$= \frac{a^3 \sin.^3\lambda + 3p\, a^2 \sin.\lambda \cos.\lambda + b^3 \sin.^3\omega + 3p\, b^2 \sin.\omega \cos.\omega}{6p}$$

9. Constat jam ex celeberrima Kepleriana Lege, tempora quibus diversi Planetae vel Cometae arcus quoslibet orbitarum suarum percurrunt rationem sequi simplicem directam arearum ab ipsis arcubus & binis radiis vectoribus interceptarum, & subduplicatam inversam parametrorum; itaque si dicatur T tempus periodicum Terrae, unius nempe anni siderei, A area totius orbitae terrestris, h ejus parameter, t vero tempus, quo Cometa describit arcum MC, habebitur haec analogia

$$\frac{A}{\sqrt{h}} : \frac{a^3\sin.^3\lambda + 3pa^2\sin.\lambda\cos.\lambda + b^3\sin.^3\omega + 3pb^2\sin.\omega\cos.\omega}{12\sqrt{p^3}} ::$$

$T : t$. Quare fit t

$$= \frac{T(a^3\sin.^3\lambda + 3pa^2\sin.\lambda\cos.\lambda + b^3\sin.^3\omega + 3pb^2\sin.\omega\cos.\omega)}{12 A \sqrt{p^3}} \times$$

$\sqrt{h}$. Invenitur porro area A orbitae terrestris ex nota ratione, quam habet ad aream circuli semiaxe transverso orbitae tanquam radio descripti, quae scilicet

eadem est ac ratio semiaxis conjugati ad semiaxem transversum. Quum enim semiaxem ellipsis terrestris transversum, seu distantiam terrae mediocrem a Sole §. 4. unitati aequalem sumpserimus, denotante $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam oritur circuli radio 1 descripti area $= \pi$; quamobrem ob $\sqrt{\frac{1}{2}h} =$ semiaxi conjugato orbitae terrestris prodit $1 : \sqrt{\frac{1}{2}h} :: \pi : A$, hoc est $A = \pi\sqrt{\frac{1}{2}h}$. Inde postremo consequitur t

$$= \frac{T(a^3\sin.^3\lambda + 3pa^2\sin.\lambda\cos.\lambda + b^3\sin.^3\omega + 3pb^2\sin.\omega\cos.\omega)}{12\pi\sqrt{\frac{1}{2}p^3}}$$

10. Jamvero exploratum est, tempus periodicum Terrae ad Fixas relatum complecti $365^d.\ 6^h.\ 9'.\ 11''$, nimirum dies 365, 2563773; itaque calculus instituetur hoc pacto

log. a	. . . .	0, 6592885
log. sin. λ	. . . .	9, 8216498
log. a³	. . . .	1, 9778655
log. sin.³ λ	. . . .	9, 4649494
log. a³ sin.³ λ	. . . .	1, 4428149
a³ sin.³ λ	. . . .	27, 72138
log. 3	. . . .	0, 4771213
log. p	. . . .	0, 6009500

$\log.\ a^2$	1, 3185770
$\log.\ \sin.\ \lambda$	9, 8216498
$\log.\ \cos.\ \lambda$	9, 8741541
$\log.\ 3pa^2\ \sin.\lambda\ \cos.\ \lambda$	2, 0924522
$3pa^2\ \sin.\lambda\ \cos.\lambda$	123, 7235
$\log.\ b$	0, 6711080
$\log.\ \sin.\ \omega$	9, 8529066
$\log.\ b^3$	2, 0133240
$\log.\ \sin.^3\ \omega$	9, 5587198
$\log.\ b^3\ \sin.^3\ \omega$	1, 5720438
$b^3\ \sin.^3\ \omega$	37, 32878
$\log.\ 3$	0, 4771213
$\log.\ p$	0, 6009500
$\log.\ b^2$	1, 3422160
$\log.\ \sin.\ \omega$	9, 8529066
$\log.\ \cos.\ \omega$	9, 8460086
$\log.\ 3p\ b^2\ \sin.\omega\ \cos.\omega$	2, 1192025
$3p\ b^2\ \sin.\omega\ \cos.\omega$	131, 5838
$a^3\ \sin.^3 x + 3pa^2\ \sin.\lambda\ \cos.\lambda + b^3\ \sin.^3\ \omega + 3pb^2\ \sin.\omega\ \cos.\omega = P$	320, 35746

$\log.\ P$	2, 5056348
$\log.\ T$	2, 5625978
$\log.\ TP$	5, 0682326
$\log.\ p$	0, 6009500
$\log.\ p^3$	1, 8028500
$\log.\ 72$	1, 8573325
$\log.\ 72\ p^3$	3, 6601825
$\log.\ \sqrt{72p^3}$	1, 8300912
$\log.\ \pi$	0, 4971499
$\log.\ \pi\sqrt{72\ p^3}$	2, 3272411
$\log.\ \dfrac{TP}{\pi\sqrt{72p^2}}$	2, 7409915
$\dfrac{TP}{\pi\sqrt{72p^3}}$	550, 79683

Igitur Cometa in percurrendo arcu *MPC* tempus absumit dierum quingentorum quinquaginta, horarum undeviginti.

11. Sagacissimus Geometra LAMBERTUS, cujus immaturam mortem, dum haec scribo, mihi nuntiatam nunquam satis Disciplinae Mathematicae lugebunt, in eximio Opusculo de *Insignioribus Orbitae Cometarum*

Proprietatibus, quo nihil legi poteſt elegantius, nihil ingenioſius, Problemate XV. inveniendum ſibi proponit tempus, quo Cometa deſcribit arcum *MPC* data ſumma radiorum vectorum *SC*, *SM* una cum chorda arcum *MPC* ſubtendente: facta vero eadem chorda $= k$ expreſſionem temporis nanciſcitur ſimplicitate & elegantia prope admirabilem, ſcilicet

$$T = \frac{\left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{3m\sqrt{2}}$$, in qua valor litterae m Lamberto eſt $\frac{1}{116,2648}$. Ut formulam hanc in exemplo praecedenti experiamur, ejuſque conſenſum cum formula noſtra oſtendamus, inveſtigetur prius valor chordae k, quae nimirum ex Geometria invenitur $= \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos. \varphi)}$, hoc eſt §. 4. $k = \sqrt{40,57} = 6,36946$. Fiet igitur

a	4, 5634
b	4, 6893
k	6, 36946
$a+b+k$	15, 62216
$\frac{a+b+k}{2}$	7, 81108

$\log. \frac{a+b+k}{2}$	0, 8927110
$\log. \left(\frac{a+b+k}{2}\right)^3$	2, 6781330
$\log. \left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$	1, 3390665
$\left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$	21, 83065
$a+b$	9, 2527
$-k$	−6, 36946
$a+b-k$	2, 88324
$\frac{a+b-k}{2}$	1, 44162
$\log. \frac{a+b-k}{2}$	0, 1588508
$\log. \left(\frac{a+b-k}{2}\right)^3$	0, 4765524
$\log. \left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$	0, 2382762
$\left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$	1, 73092

$$\left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \ldots\ldots \quad 20,\ 09973$$

$$\log.\left(\left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \ldots \quad 1,\ 3031903$$

$$\log.\frac{1}{m} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2,\ 0654481$$

$$\log.\ \frac{1}{m}\left(\left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \ldots \quad 3,\ 3686384$$

$$\log.\ 2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0,\ 3010300$$

$$\log.\ \sqrt{2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0,\ 1505150$$

$$\log.\ 3 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0,\ 4771213$$

$$\log.\ 3\sqrt{2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0,\ 6276363$$

$$\log.\ \frac{\frac{1}{m}\left(\left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)}{3\sqrt{2}} \ldots \quad 2,\ 7410021$$

Quare oritur $T = 550,\ 8104$, quod ne ſemihora quidem differt a tempore ex formula noſtra prodeunte.

12. Si tempus quaeratur totius revolutionis Cometae per orbem ſuum, tempus ſcilicet periodicum, illud nequaquam poteſt per parabolam determinari: quandoquidem obſervationes illae, quae in Cometa prope Solem verſante nobiſque conſpicuo poſſunt inſtitui, ideo periodicum Cometae tempus exhiberent quod ex

illis majoris Ellipſeos axis longitudo colligeretur. Id vero nequit, ut per ſe liquet, per parabolam obtineri. Res autem eſſet infiniti prope operis immenſique laboris, Cometae orbem tamquam Ellipſim, qualis revera eſt, ſpectare, ejus Ellipſis formam ex obſervationibus definire, atque porro ex nota diſtantia umbilici a proximo vertice axis majoris longitudinem deducere. Praeterea tam immanis labor incaſſum magna ex parte ſuſciperetur parumque admodum accurationis inde ſperare fas eſſet, ſiquidem vel minimus in obſervando, iſque inevitabilis admiſſus error Elliptici orbis formam, indeque concluſam axis majoris menſuram maximopere immutat. Quum enim, ut notum eſt, minima ſufficiat variatio ad hoc, ut Ellipſis in Parabolam convertatur, & Ellipſeos axis infinitam longitudinem adipiſcatur; propterea aberratio multo adhuc minor poterit axem ipſum ſi non infinite, plurimum certe protendere vel contrahere.

13. Itaque longe conſultius erit ex orbis parabolici poſitione, ex parametri longitudine, ex minima Cometae a Sole diſtantia Cometam unum ab altero internoſcere, ita ut ſi bini Cometarum orbes in hiſce notis & caracteribus ſecum invicem undequaque conſentiant, ac parva, ſi quae occurrit, diſcrepantia vel obſervationibus non omnimode accuratis, vel mutatio-

nibus in Cometae curſu incidentibus adſcribi jure poſſit, orbes ipſi ſpecie tenus diverſi pro uno eodemque habendi ſint, in quo unicus Cometa revolvatur. Si praeterea tempora etiam, poſt quorum lapſum Cometa ad perihelium regreditur, inveniantur aequalia, nulla ſane ſupererit de Cometae identitate incertitudo aut haeſitatio, ſimulque tempus ipſius periodicum tuto inde certiſſimeque colligetur.

14. Talis orbium congruentia detecta potiſſimum fuit in Cometa, qui anno 1456. die 9. Junii, anno 1531. die 28. Februarii, anno 1607. die 26. Octobris, & anno 1682. die 14. Septembris ad Solem maxime appropinquavit. Tempus inter binas proximas hujus Cometae apparitiones elapſum complectitur annos circiter $75\frac{1}{2}$. Quapropter ejus Cometae reditus jure merito expectabatur anno 1759., quemadmodum reipſa contigit, quum die 13. Martii ipſe perihelium attigerit. Sed de hujus Cometae motu, periodo, perturbatione incredibili ingenii ſagacitate & induſtria egit ſummus Geometra CLAIRAUT, qui eximio edito opere *Théorie du Mouvement des Cometes* immani exantlato calculorum labore omnes illius Cometae perturbationes, indeque ortam periodici temporis protractionem definivit.

15. Ex noto iſtius Cometae tempore periodico T inveniri facile poteſt media ipſius a Sole diſtantia D,

ſeu ſemiaxis major Ellipſeos per exploratiſſimam Aſtronomiae legem, juxta quam periodica Planetarum tempora rationem ſequuntur ſeſquiplicatam mediarum a Sole diſtantiarum. Si enim tum ſemiaxis major terreſtris orbitae, tum periodicum telluris tempus unitatis loco accipiantur, prodibit aequalitas $D = T^{\frac{2}{3}}$. Hinc igitur erit

T . . . . $= 75\frac{1}{2}$ annis

$log.\ T$ . . . . $=$ 1, 8779469

$log.\ T^{\frac{2}{3}}$ . . . . $=$ 1, 2519646

proindeque $T^{\frac{2}{3}} = D = 17,8634$, nimirum media Telluris a Sole diſtantia ſe habet ad diſtantiam Cometae mediam a Sole uti 10000 ad 178634. Quoniam vero diſtantia hujus Cometae perihelia, ſeu minima ſumitur $= 0,583$, hac dempta a mediocri 17, 8634 relinquitur Cometae excentricitas $= 17,2804$. Addita porro excentricitate ſemiaxi Ellipſeos majori oritur diſtantia Cometae maxima ſeu aphelia $= 35,1438$. Inventa jam excentricitate e, & ſemiaxe majore D elicitur ſemiaxis minor δ ex nota aequatione $\delta = \sqrt{(D^2 - e^2)}$ hunc in modum

log. e	. . . . =	1, 2375538
log. e^2	. . . . =	2, 4751076
e^2	. . . . =	298, 612
log. D	. . . . =	1, 2519646
log. D^2	. . . . =	2, 5039292
D^2	. . . . =	319, 102
$D^2 - e^2$	. . . . =	20, 490
log. $(D^2 - e^2)$	. . . . =	1, 3115420
log. $\sqrt{(D^2 - e^2)}$	. . . . . =	0, 6557710

Fit itaque semiaxis minor = 4, 5266. Hisce porro quantitatibus exploratis & cognitis pronum erit expeditumque Cometae orbitam graphice delineare.

16. In Actis Lipsiensibus nuper propositum fuit demonstratione suppressa Theorema elegantissimum hisce verbis conceptum: *Data distantia Cometae a Sole SM* $= v$, *una cum angulo SMN* $= \psi$, *quem ea cum tangente facit orbitae parabolicae, erit tempus quo ex M ad perihelium pertingit* $= (\cos.\psi - \frac{2}{3}\cos.\psi^3)\, v \sqrt{2v}$, *quod tempus exprimitur per arcum circuli radio* $= 1$ *descripti, qui metitur motum medium Solis pro eodem temporis intervallo.* Quum hujus pulcherrimi Theorematis

demonstrationem quam fieri potest simplicissimam identidem animo volutarem, eandem demum sic assequutus sum:

Dem: Posito angulo *PSM*, sive anomalia vera $= \varphi$, perspicuum est, sectoris parabolici *PMS* elementum esse $\frac{1}{2} v^2 \, d\varphi$; quum autem in Parabola angulus *SMN* aequetur angulo *SNM*, fiet icirco $\varphi = 180° - 2\psi$, & $d\varphi = -2 d\psi$; proindeque $\frac{1}{2} v^2 d\varphi = -v^2 d\psi$.

Igitur sector parabolicus $PMS = -\int v^2 \, d\psi$. Jamvero constat ex Conicis, parabolae parametrum p aequalem esse quadruplo radio vectori ducto in quadratum sinus anguli *SMN*, videlicet $p = 4v \, \sin.\psi^2$, & consequenter $v^2 = \frac{p^2}{16 \sin.\psi^4}$: ergo $PMS = -\frac{p^2}{16} \int \frac{d\psi}{\sin.\psi^4}$.

Est autem, ut ex Calculo Integrali notum est, $\int \frac{d\psi}{\sin.\psi^4}$

$= -\frac{\cos.\psi}{3 \sin.\psi^3} - \frac{2\cos.\psi}{3 \sin.\psi}$: quapropter *PMS*

$= \frac{p^2}{16}\left(\frac{\cos.\psi}{3 \sin.\psi^3} + \frac{2\cos.\psi}{3 \sin.\psi}\right) = v^2 \left(\frac{1}{3}\cos.\psi \sin.\psi\right.$

$\left. + \frac{2}{3}\cos.\psi \sin.\psi^3\right)$, sine ulla Constantis additione quia evanefcit Sector ubi $\psi = 90°$. Conftat porro ex Mechanicis, tempus, quo Cometes defcribit arcum *MP*, aequari duplae areae *MPS* divifae per radicem femiparametri: hinc erit quaefitum tempus $= \frac{2\,v^2}{\sqrt{\frac{1}{2}p}} \times$

$$(\tfrac{1}{3}\,cos.\,\psi\,\mathit{fin}.\,\psi + \tfrac{2}{3}\,cos.\,\psi\,\mathit{fin}.\,\psi^3) = \frac{2\,v^2}{\sqrt{2\,v\,\mathit{fin}.\,\psi^2}} \times$$

$(\frac{1}{3} cos.\psi\,\mathit{fin}.\psi + \frac{2}{3}\,cos.\psi\,\mathit{fin}.\psi^3) = (\frac{1}{3} cos.\psi + \frac{2}{3} cos.\psi\,\mathit{fin}.\psi^2) \times v\sqrt{2v} = (cos.\psi - \frac{2}{3}\,cos.\psi^3)\,v\sqrt{2v}$. *Q. E. D.* Demonftrationem parum ab hac difcrepantem inveni poftmodum in eximio Euleriano Opufculo, *Recherches & Calculs fur la vraie Orbite Elliptique de la Comete de l'an.* 1769. *& fon tems périodique, executées fous la direction de Mr. Leonhard EULER par les foins de Mr. LEXELL.* A' St. Petersbourg. 1770.

17. Si in hujus expreffione temporis fubftituatur loco $cos.\,\psi^3$ ejus valor $\frac{3}{4}\,cos.\,\psi + \frac{1}{4}\,cos.\,3\,\psi$, fit tempus ipfum, quo Cometes ad perihelium pertingit, $= (cos.\,\psi - \frac{1}{3}\,cos.\,3\,\psi)\,v\sqrt{\frac{1}{2}v}$. Caeterum fi fectoris parabolici *PMS* quadraturam aliter inveftigemus, nimirum ex proprietate parabolae de quadrato ordinatae retangulum ex abfciffa in parametrum aequante; aliam tunc nancifcimur fectoris ipfius expreffionem, videlicet

$\frac{1}{p}(\frac{1}{6}\,v^3\,\mathit{fin}.\,2\,\psi^3 + \frac{1}{8}\,p^2\,v\,\mathit{fin}.\,2\,\psi)$, quae loco ipfius p pofito ejus valore $4v\,\mathit{fin}.\,\psi^2$ abit in

$(\frac{1}{3}\,v^2\,\mathit{fin}.\,\psi\,cos.\,\psi^3 + v^2\,\mathit{fin}.\,\psi^3\,cos.\,\psi) =$

$v^2(\mathit{fin}.\,\psi\,cos.\,\psi - \frac{2}{3}\mathit{fin}.\,\psi\,cos.\,\psi^3)$,

hacque ducta in $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{p}}$, five in $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{v\,\mathit{fin}.\,\psi^2}}$, oritur tempus quaefitum $= (cos.\,\psi - \frac{2}{3}\,cos.\psi^3)\,v\sqrt{2v}$ prorfus ut ante.

18. Inventa expreffione temporis fimpliciffima, & ad calculos prompte fupputandos aptiffima, quaeri jam poteft qualis effe debeat angulus ψ, fub quo Cometes manente diftantia v eadem longiffimum tempus infumit, ut ad perihelium defcendat. Capiatur nempe expreffionis ipfius differentiale $-d\psi\,\mathit{fin}.\psi + 2d\psi\,\mathit{fin}.\psi\,cos.\,\psi^2$, quod nihilo aequatum praebet $2\,cos.\psi^2 - 1 = 0$, feu $cos.\psi = \mathit{fin}.\psi = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Igitur quaefitus angulus $\psi = 45°$, feu femirectus. Eapropter tunc Cometes ad perihelium tardiffime pertingit, cum ejus a Sole diftantia cum orbitae tangente angulum femirectum conftituit. Si porro fubftituatur $\sqrt{\frac{1}{2}}$ loco $cos.\,\psi$ in expreffione temporis, prodit tempus longiffimum $= \frac{2}{3}\,v\sqrt{v}$, qua fane formula nihil excogitari poteft elegantius. Tempus autem *Maximum* five longiffimum hic haberi inde liquet, quod

ſecunda illius differentia negativum praeſefert valorem; ſumpto enim iterum differentiali quantitatis $-d\psi\, \text{ſin.}\, \psi + 2d\psi\, \text{ſin.}\, \psi\, \cos.\, \psi^2$ habetur $-d\psi^2 \cos.\, \psi + 2d\psi^2 \cos.\, \psi^3 - 4d\psi^2\, \text{ſin.}\, \psi^2 \cos.\, \psi$, ſeu $d\psi^2 (2 \cos.\, \psi^3 - 4 \cos.\, \psi\, \text{ſin.}\, \psi^2 - \cos.\, \psi)$, ubi poſito $\cos.\, \psi = \text{ſin.}\, \psi = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ fit demum $(\sqrt{\tfrac{1}{2}} - 2\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}})d\psi^2$, hoc eſt $-2d\psi^2 \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, cujus valor manifeſto negativus maximum ſeu lentiſſimum indicat tempus.

DISQUISITIO VIII.

DE AXIBUS AEQUILIBRII.

1. NOtum eſt, vocari a Mechanicis *Axem Æquilibrii* figurae cujuslibet planae rectam illam, quae per centrum gravitatis figurae ipſius trajicitur, & *Planum Æquilibrii* figurae ſolidae cujuſcumque nuncupari illud, quod per gravitatis centrum ipſius ſolidi tranſit: quae ſane denominatio petita eſt ab aequilibrio, quod tuentur & ſervant partes omnes figurarum planarum ſolidarumque circa illos Æquilibrii Axes, aut Plana. Nimirum ea eſt Axis, vel Plani Æquilibrii proprietas, ut figuram dividat in ſegmenta bina, quae aequalibus hinc inde librantur momentis. Atque haec momentorum aequalitas evidentiſſima eſt, ac nulla peculiari indiget demonſtratione quotieſcumque Axis, aut Planum Æquilibrii eam obtinet poſitionem, ut ſingula figurae elementa bifariam ſecentur, ſed non aeque evidens ac perſpicua eſt quoties iſta conditio in Axe Æquilibrii deſideratur. Ut igitur (quod Mechanici paſſim ſilentio praetereunt) id ipſum oſtendatur in illis etiam caſibus, in quibus Axis, aut Planum Æquilibrii ſingula fi-

gurae elementa non fecat bifariam, duo feligam exempla, alterum trianguli, alterum coni, in quorum primo Axis, in poftremo Planum Æquilibrii pofitionem habent bafi parallelam, adeoque diverfam a pofitione requifita; oftendamque in hac quoque Axis pofitione bina trianguli, & coni fegmenta aequalibus momentis circa ipfum Axem librari.

Tab. II. Fig. 6. 2. Sit itaque primo triangulum quodvis BAC & per eius gravitatis centrum E agatur recta MN bafi BC parallela; ajo, bina trianguli fegmenta MAN, $BMNC$ momentis aequalibus circa Æquilibrii Axem MN librari.

Ducantur enim in triangulo MAN rectae FG, fg, & in trapezio $BMNC$ rectae PQ, pq infinite propinquae, & Axi MN parallelae, agaturque in ipfas a trianguli vertice perpendiculum Ai; tum dic MN a, AN b, FG y, & erit $AT = \frac{by}{a}$, $Tt = \frac{b\,dy}{a}$, & trianguli AMN elementum $FG\,gf = \frac{by\,dy}{a}$. Hoc aurem ducto in diftantiam TH ab Axe MN oritur illius momentum refpectu ipfius Axis, hoc eft $\frac{by\,dy}{a}\left(b - \frac{by}{a}\right)$, cujus integrale $\frac{b^2 y^2}{2a} - \frac{b^2 y^3}{3a^2}$ praebet momentum trian-

guli FAG refpectu Axis MN. Si in hac porro expreffione fiat $y = a$, prodibit $\frac{1}{2}b^2 a - \frac{1}{3}b^2 a = \frac{1}{6}b^2 a$, quod exhibet momentum totius trianguli MAN refpectu Axis MN. Id ipfum confequuti effemus ducta trianguli MAN area $\frac{1}{2}ab$ in diftantiam fui centri gravitatis a latere MN five in $\frac{1}{3}b$.

Sit modo in trapezio $BMNC$ recta $PQ = z$, & invenietur $AI = \frac{bz}{a}$, $Ii = \frac{b\,dz}{a}$, elementum trapezii $PQ\,qp = \frac{bz\,dz}{a}$, cujus productum in diftantiam IH, five in $\frac{bz}{a} - b$ praebet $\frac{b^2 z^2\,dz}{a^2} - \frac{b^2 z\,dz}{a}$ = momento ejus elementi refpectu Axis MN. Summa momentorum hujufmodi, hoc eft integrale illius expreffionis invenitur $= \frac{b^2 z^3}{3a^2} - \frac{b^2 z^2}{2a} + \text{Conft.} =$ momento trapezii $MPQN$; & quoniam evanefcente trapezio, feu facta $z = a$, evanefcit ejus momentum, iccirco oritur Conft. $= \frac{1}{2}b^2 a - \frac{1}{3}b^2 a = \frac{1}{6}b^2 a$, & ipfius trapezii momentum $= \frac{b^2 z^3}{3a^2} - \frac{b^3 z^2}{2a} + \frac{1}{6}b^2 a$. Abeunte vero PQ in BC five z in $\frac{3}{2}a$ invenitur totius trapezii $MNCB$ momentum $= \frac{2}{8}b^2 a - \frac{2}{8}b^2 a + \frac{1}{6}b^2 a = \frac{1}{6}b^2 a$. Igitur trianguli MAN, & trapezii $BMNC$ momenta refpectu Axis MN inter se aequantur. $Q.\ E.\ D.$

3. Sit secundo Conus BAC, & per centrum gravitatis E trajiciatur planum MN basi BC parallelum: dico momentum coni MAN respectu plani MN aequale esse momento frusti conici $BMNC$ respectu plani ejusdem. Ductis planis hinc FG, fg, inde PQ, pq infinite proximis, & basi parallelis, & Ai in eadem plana perpendiculari, fiat circuli MN diameter $= a$, circuli FG diameter $= y$, perpendiculum $AH = b$, sitque $1 : \pi$ ratio diametri ad circuli peripheriam. Erit jam $AT = \frac{by}{a}$, $Tt = \frac{b\,dy}{a}$, circulus $FG = \frac{1}{4}\pi y^2$, coni MAN elementum $FGgf = \frac{\pi b y^2 dy}{4a}$, quod ductum in TH, sive in $b - \frac{by}{a}$ dat ipsius momentum respectu Plani MN, nimirum $\frac{\pi b^2 y^2 dy}{4a} - \frac{\pi b^2 y^3 dy}{4a^2}$, & omnium hujusmodi momentorum summa, hoc est

$$\int \frac{\pi b^2 y^2\, dy}{4a} - \int \frac{\pi b^2 y^3\, dy}{4a^2} = \frac{\pi b^2 y^3}{12a} - \frac{\pi b^2 y^4}{16a^2}$$

praebet momentum coni FAG respectu Plani MN. Abeunte autem FG in MN, seu y in a oritur $\frac{1}{12}\pi b^2 a^2 - \frac{1}{16}\pi b^2 a^2 = \frac{1}{48}\pi b^2 a^2 =$ momento totius coni MAN respectu Plani MN. Idem invenitur ducta coni

MAN soliditate $\frac{1}{12}\pi b a^2$ in distantiam sui centri gravitatis a basi MN, hoc est in $\frac{1}{4} b$.

Rursus in cono truncato $BMNC$ circuli PQ diameter vocetur z, eritque $AI = \frac{bz}{a}$, $Ii = \frac{b\,dz}{a}$, $HI = \frac{bz}{a} - b$, circulus $PQ = \frac{1}{4}\pi z^2$, elementum coni truncati $PQqp = \frac{\pi b z^2 dz}{4a}$, hujus momentum respectu Plani $MN = \frac{\pi b z^2 dz}{4a}\left(\frac{bz}{a} - b\right)$. Accepta summa omnium momentorum hujusmodi $\int \frac{\pi b z^2 dz}{4a}\left(\frac{bz}{a} - b\right)$, detegitur $\frac{\pi b^2 z^4}{16a^2} - \frac{\pi b^2 z^3}{12a} +$ Const. $=$ momento coni truncati $PMNQ$: quum autem una cum cono truncato $PMNQ$ evanescat ejus momentum, abeunte nimirum z in a, fit ideo Const. $= \frac{1}{12}\pi b^2 a^2 - \frac{1}{16}\pi b^2 a^2 = \frac{1}{48}\pi b^2 a^2$; ac proinde frusti ipsius conici momentum evadit $\frac{\pi b^2 z^4}{16a^2} - \frac{\pi b^2 z^3}{12a} + \frac{1}{21}\pi b^2 a^2$. Facta porro $z = \frac{4}{3}a$, seu abeunte PQ in BC (est enim, ex proprietate centri gravitatis, baseos BC diameter $= \frac{4}{3}a$), oritur totius frusti conici $BMNC$ momentum $= \frac{16}{81}\pi b^2 a^2 - \frac{16}{81}\pi b^2 a^2 + \frac{1}{48}\pi b^2 a^2 = \frac{1}{48}\pi b^2 a^2$.

Igitur conus *MAN*, & fruſtum conicum *BMNC* momentis aequalibus circa Planum *MN* librantur. *Q. E. D.*

4. Hinc luculenter patet quam abſurda & praepoſtera ſit centri gravitatis definitio, quae in Mechanicis Inſtitutionibus a nonnemine proponitur, eſſe nimirum in figura qualibet gravitatis centrum punctum illud, per quod traductum utcumque planum figuram dividit in partes duas aequaliter ponderantes, & conſequenter in partes binas aequales, ſi figura ex materia conſtet homogenea; cui porro definitioni multorum Theorematum alias comprobatorum inaedificantur demonſtrationes, prorſus mendoſae & fallaces. Id palam fit in triangulo *BAC*, ubi Axis aequilibrii *MN* triangulum ſecat in partes binas *MAN*, *BMNC* aequalibus hinc inde libratas momentis, ſed minime aequalibus ponderibus: eſt enim triangulum *MAN* ad triangulum *BAC* uti quadratum *MN* ad quadratum *BC*, ſive ex proprietate centri gravitatis uti 4 ad 9; ac proinde dividendo, triangulum *MAN* ſe habet ad trapezium *BMNC* uti 4 ad 5. Igitur triangulum & trapezium inaequalia ſunt, & inaequaliter ponderantia.

5. Idem in cono quoque perſpicuum fit: nam ob conorum *MAN*, *BAC* ſimilitudinem, primus ſe habet ad ſecundum uti cubus diametri baſeos *MN*, ad cubum diametri baſeos *BC*, ſive (ex nota proprietate

centri gravitatis in cono) uti cubus numeri ternarii ad cubum quaternarii, hoc eſt uti 27 ad 64; itaque dividendo, erit conus *MAN* ad fruſtum conicum *BMNC* uti eſt 27 ad 37. Ex quo patet, conum ipſum *MAN*, & fruſtum conicum *BMNC* aequalibus quidem hinc inde urgeri momentis, & circa planum *MN* aequilibrari, ſed inaequalibus maſſis & ponderibus donari.

6. Caeterum a non vulgaribus cultioris Mechanicae Scriptoribus de centro gravitatis, quod in quolibet punctorum gravium vel maſſarum ſyſtemate invenitur, tria haec demonſtrari conſuevere; 1° quod ſi per centrum illud agatur planum aliquod, maſſarum ad unam plani partem exiſtentium pondera in ſuas ab illo diſtantias ducta tantum efficiant quantum pondera maſſarum ad aliam plani partem collocatarum, ducta ſimiliter in ſuas ab ipſo plano diſtantias: 2° quod ſi maſſae omnes totius ſyſtematis fuerint ad eandem alicujus dati plani partem, producta ex earum maſſarum ponderibus in ſuas ab eo diſtantias aequalia ſint ei quod oritur multiplicando ſummam ponderum per diſtantiam communis centri gravitatis a plano propoſito: 3° quod ſi maſsae nonnullae fuerint ad unam cujuslibet dati plani partem, reliquae ad partem alteram, ductis ponderibus illarum in ſuas a plano diſtantias, itidemque ponderibus iſtarum in diſtantias ſuas ab eodem plano,

differentia productorum aequalis ſit facto ex aggregato ponderum omnium ducto in diſtantiam communis centri gravitatis a plano eodem.

7. Ex hiſce porro ſtatim conſequitur, in figura quavis geometrica *Planum Æquilibrii* ea donari proprietate, ut bina figurae ſegmenta ipſum interjacentia & quomodocumque inaequalia momentis aequalibus circa illud librentur; at quoniam quaeri merito poteſt, & ſaepe quaeſitum eſt a nonnullis, ut id ipſum de *Plano aequilibrii*, ſive utcumque per centrum gravitatis traducto oſtendatur per ſe, & non ut corollarium ex praedictis centri gravitatis proprietatibus inferatur; propterea quaeſitae demonſtrationis ſpecimen in triangulo, & cono exhibuimus; ex quo deinceps ad idem in propoſita quacumque figura oſtendendum patefacta erit via.

DISQUISITIO IX.

DE CURVIS A CENTRO GRAVITATIS DESCRIPTIS.

DUM quaelibet geometrica magnitudo motu aliquo fertur vel rotatorio, vel utcumque curvilineo, vel etiam rectilineo; centrum gravitatis ipſius certas quaſdam deſcribit ſemitas, quarum peculiares a Staticae Scriptoribus recenſentur proprietates. Harum princeps ac celeberrima ea eſt, quae ab inventore GULDINO Guldiniana appellatur, licet eam ſubobſcure PAPPUS Alexandrinus *Collectionum Mathematicarum* Libro VII. indicaverit: in motu ſcilicet magnitudinis cujuſcumque talis eſt via a centro gravitatis deſcripta (modo haec perpendicularis ubique fuerit ad magnitudinem motam), ut ſi viam ipſam ducas in magnitudinem generantem habeas factum aequale figurae motu illo genitae ac productae. Sed praeter ſemitas haſce Mechanicis dudum notas & excultas, dantur Curvae aliae quaedam, quas centrum gravitatis deſcribit dum a geometrica figura partes quaedam demuntur aliae poſt alias donec figura evaneſcat. Curvarum hujuſmodi aequationes quatuor elegantiſſimas aſſequutus, eas hic totidem Problematibus expono, demonſtrationeſque Geometris facile occurrentes praetermitto. Eſto itaque

PROBLEMA I.

Tab.II. Fig. 7. Si a dato Circulo *SEG* demantur per vices & ex eadem parte ſectores minimi *BCD*, *DCE*, &c. centrum gravitatis areae deinceps reſiduae iter conficiet curvilineum *CIFO*, cujus initium eſt circuli centrum, finis punctum *O* in ſemidiametro minimi ſectoris ultimo ſuperſtitis, cujus puncti diſtantia a circuli centro trientes duos ſemidiametri exaequat. Quaeritur Curvae *CIFO* natura.

SOLUTIO.

Referatur Curva ad centrum Circuli *C* tamquam ad focum, dicaturque y ordinata, ſeu radius vector *CF*, x Circuli arcus *BG* ab hac ordinata *CF*, & a poſtrema *CO* productis interceptus, & dati circuli radius accipiatur unitati aequalis: Ajo, naturam Curvae per hanc aequationem elegantiſſimam repraeſentari

$$y = \frac{2 \, \text{ſin.} \, x}{3x}.$$

PROBLEMA II.

Si a dati Circuli peripheria *FMI* auferantur ordinatim, & ex eadem parte arcus minimi *FG*, *GI*, &c. centrum gravitatis peripheriae deinceps reſiduae viam percurret curvilineam *CARF*, incipientem a centro circuli, & in extremum ſemidiametri deſinentem. Petitur hujus ſemitae indoles. Tab.II. Fig. 8.

SOLUTIO.

Accipe, ut antea, Circuli centrum *C* pro ſemitae curvilineae foco, & dic ordinatam *CR* y, abſciſſam ſeu circularem arcum *FE* x; circuli radium 1. Æquationem curvae ſimpliciſſimam hanc habebis.

$$y = \frac{\text{ſin.} \, x}{x}.$$

PROBLEMA III.

Tab.II. Fig. 9. Si a dato Circulo QAP per chordas LN, LO, LP &c. abſcindantur ſingillatim, & ex eadem ſemper parte ſegmenta minima LNM, LON, LPO &c. ita ut gravitatis centrum ſegmentorum circuli deinceps ſuperſtitum recedendo a centro C per Curvam incedat $CUFL$ quouſque ad ſemidiametri extremum L pertingat; quaeritur in hac hypotheſi ejuſdem Curvae $CUFL$ aequatio.

SOLUTIO.

Servatis praecedentibus denominationibus radii vectoris $CF = y$, arcus circularis $LA = x$, & ſemidiametri $= 1$, invenitur quaeſita Curvae ad focum C relatae aequatio, quae ſequitur.

$$y = \frac{2\, \sin.^3 x}{3x - 3\, \sin. x \cos. x}.$$

PROBLEMA IV.

Si Sphaera QPA genita ex converſione circuli QPA circa diametrum planis ſecetur LN, LO, LP, &c., abſcindentibus per vices & ex eadem parte ſegmenta minima LNM, LON, LPO, &c. quaeritur via $CUFL$, quam tenet centrum gravitatis ſegmentorum ſphaerae deinceps reſiduorum dum a ſphaerae centro C ad ſuperficiem uſque in L progreditur. Tab.III. Fig.10.

SOLUTIO.

Poſito rurſus radio vectore $CF = y$, circuli maximi arcu $LA = x$, ſphaerae ſemidiametro $= 1$, Curvae aequatio umbilicalis ita reperitur

$$y = \frac{6\, \cos.^2 x - 3\, \cos.^4 x - 3}{12\, \cos. x - 4\, \cos.^3 x - 8}$$

SCHOLION GENERALE.

1° Æquatio primi Problematis $y = \frac{2\,\text{fin.}\,x}{3x}$ evanefcente arcu x mutatur in $\frac{0}{0}$: attamen tunc y eft $= \frac{2}{3}$, ut conftat. Sed fumpto arcu infinitefimo dx invenitur revera $y = \frac{2\,\text{fin.}\,dx}{3\,dx} = \frac{2\,dx}{3\,dx} = \frac{2}{3}$, quum perfpectum alias fit finum arcus infinitefimi dx non differre ab ipfo arcu dx.

2° Pariter fecundi Problematis aequatio $y = \frac{\text{fin.}\,x}{x}$, quae transformatur in $\frac{0}{0}$ pofito $x = 0$, per eandem fubftitutionem evadit $y = \frac{\text{fin.}\,dx}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$, qualem effe oportet.

3° Ad aequationem quod attinet Problematis tertii, fumpto ibi, uti prius, arcu infinitefimo dx, reperitur $y = \frac{2\,\text{fin.}^3\,dx}{3\,dx - 3\,\text{fin.}\,dx}$ (exiftente fcilicet $\cos.dx = 1$), vel $y = \frac{2\,dx^3}{3\,dx - 3\,dx} = \frac{2\,dx^2}{0}$, quae fane expreffio fufpecta & deceptrix neutiquam praebet $y = 1$, quem-

admodum opus effet. Scrupulus evellitur, fi confideres, aequationis numeratorem quantitatem effe infinitefimam ordinis tertii, & in fractionis denominatore arcum minimum x differre a finu fuo quantitate pariter infinitefima tertii ordinis: quare neceffe erit ad functionum circularium feries confugere, ut nodus folvatur. Notum eft, haberi

$$\text{fin.}\,dx = dx - \frac{dx^3}{2.3} + \frac{dx^5}{2.3.4.5} - \&c.$$

$$\cos.\,dx = 1 - \frac{dx^2}{2} + \frac{dx^4}{2.3.4} - \&c.$$

Neglectis igitur differentialibus ultra ordinem tertium, fiet $\text{fin.}^3\,dx = dx^3$, & $\text{fin.}\,dx\,\cos.\,dx = dx - \frac{2}{3}\,dx^3$. Quapropter aequatio $y = \frac{2\,\text{fin.}^3\,dx}{3\,dx - 3\,\text{fin.}\,dx\,\cos.dx}$ convertetur in $y = \frac{2\,dx^3}{3\,dx - 3\,dx + 2\,dx^3} = \frac{2dx^3}{2dx^3} = 1$, uti oportet.

4° Quarta denique aequatio $y = \frac{6\cos.^2 x - 3\cos.^4 x - 3}{12\cos.x - 4\cos.^3 x - 8}$, quae, five pro x affumatur dx, five nihilum, abit in $y = \frac{0}{0}$, generali legi pariter fubjicitur hoc pacto: Conftat, effe

$$\cos.dx = 1 - \tfrac{1}{2}\,dx^2 + \tfrac{1}{24}\,dx^4 - \&c.$$

Itaque contemptis differentialibus ultra quartum gradum fiet

$$6\cos.^2 dx = 6 - 6dx^2 + 2dx^4$$
$$-3\cos.^4 dx = -3 + 6dx^2 - 5dx^4$$
$$-3 = -3.$$

Quare aequationis numerator evadit $-3dx^4$. Rursus

$$12\cos. dx = 12 - 6dx^2 + \tfrac{1}{2}dx^4$$
$$-4\cos.^3 dx = -4 + 6dx^2 - \tfrac{7}{2}dx^4$$
$$-8 = -8.$$

Ergo etiam aequationis denominator reperitur $-3dx^4$. Proinde evanescente arcu x oritur $y = \frac{-3dx^4}{-3dx^4} = 1$, uti res postulat.

Ramis sc.

DISQUISITIO X.

DE SINGULARIBUS QUIBUSDAM CENTRI GRAVITATIS AFFECTIONIBUS IN SPATIO HYPERBOLICO-ASYMPTOTICO.

1. CEntri gravitatis investigatio in Spatio Hyperbolico-asymptotico quaedam exhibet mira prorsus ac singularia, quae dum ingenium acuunt & exercent imaginandi vim simul magnopere oblectant. Ea breviter attingam, plura huc spectantia vel affinia alio tempore daturus. Tab.III. Fig.11.

2. Inveniendum sit primo centrum gravitatis Spatii Hyperbolico-asymptotici indeterminati $BAMN$ a binis ordinatis BA, MN intercepti. Ducta ordinata nm alteri NM infinite proxima, constat ex Statica, distantiam centri gravitatis a recta BA inveniri si quodlibet spatii elementum $NMmn$ multiplicetur per distantiam suam ab ipsa recta BA, & omnium hujusmodi productorum summa dividatur per summam elementorum.

Esto itaque

$$EB = b,$$
$$BA = a,$$
$$BN = x,$$
$$NM = y,$$
$$\text{angulus } E = \varphi.$$

Hyperbolae proprietas aequationem praebet $ab = y(b + x)$; elementum vero $NMmn$ invenitur $= y\,dx\,\textit{sin.}\,\varphi = \frac{abdx\,\textit{sin.}\,\varphi}{b+x}$, hocque ductum in distantiam ND a recta BA, sive in $x\,\textit{sin.}\,\varphi$ prodit $= \frac{abxdx\,\textit{sin.}^2\varphi}{b+x}$.

Summa omnium istiusmodi productorum, seu $\int \frac{abx\,dx\,\textit{sin.}^2\varphi}{b+x}$ reperitur $= abx\,\textit{sin.}^2\varphi - ab^2\,\textit{sin.}^2\varphi \times \textit{log.}(b+x) +$ Const.; quae quidem summa quum evanescat una cum x, oritur Const. $= ab^2\,\textit{sin.}^2\varphi\,\textit{log.}\,b$, ac proinde $\int \frac{abx\,dx\,\textit{sin.}^2\varphi}{b+x} = abx\,\textit{sin.}^2\varphi - ab^2\,\textit{sin.}^2\varphi \times \textit{log.}\,\frac{b+x}{b}$. Est porro elementorum summa $\int y\,dx \times \textit{sin.}\,\varphi = \int \frac{ab\,dx\,\textit{sin.}\,\varphi}{b+x} = ab\,\textit{sin.}\,\varphi\,\textit{log.}(b+x)$

$+$ Const. $= ab\,\textit{sin.}\,\varphi\,\textit{log.}\,\frac{b+x}{b}$. Si itaque summa prior dividatur per hanc, quotiens $\frac{x\,\textit{sin.}\,\varphi}{\textit{log.}(b+x) - \textit{log.}\,b} - b\,\textit{sin.}\,\varphi$ exprimit distantiam quaesitam centri gravitatis ab ordinata prima BA.

3. Occurrit hic primo quaedam antilogiae species quando ponitur $x = 0$, in qua sane hypothesi evanescente spatio $ABnm$ debet etiam distantia ipsius centri gravitatis a recta BA evanescere: attamen istius distantiae expressio $\frac{x\,\textit{sin.}\,\varphi}{\textit{log.}(b+x) - \textit{log.}\,b} - b\,\textit{sin.}\,\varphi$ abit tunc in $\frac{0}{0} - b\,\textit{sin.}\,\varphi$, quae porro quantitas longe abesse videtur a nihilo.

4. Ad arcendam antilogiam, capio in fractione $\frac{x\,\textit{sin.}\,\varphi}{\textit{log.}(b+x) - \textit{log.}\,b}$ differentiale tum numeratoris, tum denominatoris; & fractio ipsa convertitur in $\frac{dx\,\textit{sin.}\,\varphi}{dx:(b+x)} = (b+x)\,\textit{sin.}\,\varphi = b\,\textit{sin.}\,\varphi$ ubi fuerit $x = 0$: quamobrem in hac hypothesi expressio $\frac{x\,\textit{sin.}\,\varphi}{\textit{log.}(b+x) - \textit{log.}\,b} - b\,\textit{sin.}\,\varphi$ mutatur in $b\,\textit{sin.}\,\varphi - b\,\textit{sin.}\,\varphi$, hoc est in

nihilum, quemadmodum rei natura postulat.

5. Eliminatur rursus antilogia, si pro x accipiatur non nihilum absolutum, seu o, sed infinitesima magnitudo dx: tunc enim expressio $\frac{x\, sin.\varphi}{log.(b+x)-log.b} - b\, sin.\varphi$ evadit $\frac{dx\, sin.\varphi}{log.(b+dx)-log.b} - b\, sin.\varphi$; cumque sit $log.(b+dx) = log.b + \frac{dx}{b} - \frac{dx^2}{2b^2} + \frac{dx^3}{3b^3} - \frac{dx^4}{4b^4} + \&c. = log.b + \frac{dx}{b}$, orietur eadem expressio $= \frac{dx\, sin.\varphi}{log.b + \frac{dx}{b} - log.b} - b\, sin.\varphi = b\, sin.\varphi - b\, sin.\varphi = o$, uti oportet.

6. Quaero nunc in spatio infinito *ABST* distantiam centri gravitatis a recta *BA*. Capio igitur x infinitam in formula $\frac{x\, sin.\varphi}{log.(b+x)-log.b} - b\, sin.\varphi$, quae iccirco abit in $\frac{x\, sin.\varphi}{log.x}$. Porro fractio haec numeratorem habet infinitum, infinitumque pariter denominatorem, sed hunc in immensum minorem quam illum; constat enim, logarithmum infiniti numeri $1 + 1 + 1 + 1 + \&c.$ in inf. seriem praebere numerorum naturalium reciprocam $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \&c.$ in inf., quarum quidem serierum posterior haec harmonica infinita est, uti alias liquet, sed simul infinities minor est quam series parallela unitatum, ut seriei progressum attendenti perspicuum fit. Quum igitur fractionis $\frac{x\, sin.\varphi}{log.x}$ numerator infinitus sit, & denominator pariter infinitus, sed hic infinities minor quam ille, prodit iccirco fractionis valor infinitus. Quamobrem centrum gravitatis spatii hyperbolico-asymptotici infiniti *BATS* intervallo distat infinito ab ejus origine *BA*.

7. Pergo porro, & investigo distantiam centri gravitatis Spatii *BAMN* ab asymptoto *ES*. In elemento *NMmn* a puncto ejus medio *F*, hoc est a centro gravitatis ipsius duco normalem *FG* in asymptotum *ES*, quae normalis invenitur $= \frac{1}{2} y\, sin.\varphi = \frac{ab\, sin.\varphi}{2b+2x}$: elementum vero ipsum *NMmn* inventum est $= \frac{ab\, dx\, sin.\varphi}{b+x}$. Quare factum ipsius elementi in distantiam sui centri gravitatis ab asymptoto *ES*, nimirum in *FG* prodibit $= \frac{a^2 b^2\, dx\, sin.^2\varphi}{2(b+x)^2}$. Capio nunc horum factorum summam $\int \frac{a^2 b^2\, dx\, sin.^2\varphi}{2(b+x)^2}$, & nanciscor $-\frac{a^2 b^2\, sin.^2\varphi}{2b+2x}$

$+$ Const. Determinatur Const., posita $x = 0$, qua in hypothesi evanescit summa factorum, & fit Const. $= \frac{1}{2} a^2 b \sin.^2 \varphi$; ac proinde $S \frac{a^2\, b^2\, dx \sin.^2 \varphi}{2(b+x)^2} = \frac{1}{2} a^2 b \sin.^2 \varphi - \frac{a^2\, b^2 \sin.^2 \varphi}{2b+2x}$. Divisa porro hac quantitate per elementorum summam

$$S \frac{abdx \sin.\varphi}{b+x} = ab \sin.\varphi \log.(b+x) + \text{Const.}$$

$= ab \sin.\varphi \log.\frac{b+x}{b}$, oritur quaesita distantia

$$= \frac{a \sin.\varphi}{2 \log.(b+x) - 2 \log.b} - \frac{ab \sin.\varphi}{(2b+2x)[\log.(b+x) - \log.b]}$$

$$= \frac{ax \sin.\varphi}{(2b+2x)[\log.(b+x) - \log.b]}.$$

8. Evanescente spatio $BAMN$, seu facto $x = 0$, centri gravitatis distantia $\frac{ax \sin.\varphi}{(2b+2x).[\log.(b+x) - \log.b]}$ convertitur in $\frac{0}{0}$, quum tamen evidens sit, distantiam illam tunc aequari perpendiculo, quod a puncto medio originis BA ipsius spatii cadit in asymptotum ES, quod sane perpendiculum reperitur $= \frac{1}{2} a \sin.\varphi$.

9. Hanc rursus ambiguitatem amoveo ope differentiationis tum numeratoris, tum denominatoris, ex qua habetur $\frac{a\,dx \sin.\varphi}{2dx[\log.(b+x) - \log.b] + \frac{dx}{b+x}(2b+2x)}$

$$= \frac{a \sin.\varphi\,(b+x)}{(2b+2x)[1 + \log.(b+x) - \log.b]}.$$ Haec porro quantitas in hypothesi $x = 0$ manifesto evadit $\frac{1}{2} a \sin.\varphi$, quemadmodum oportet.

10. Idem nanciscimur sumpta pro x quantitate infinitesima dx: hac enim loco x subrogata in praecedenti formula deprehenditur $\frac{a\,dx \sin.\varphi}{(2b+2dx)[\log.(b+dx) - \log.b]}$

$= \frac{a\,dx \sin.\varphi}{2b\,[\log.(b+dx) - \log.b]}$, quae $\left(\text{ob } \log.(b+dx) = \log.b + \frac{dx}{b} - \frac{dx^2}{2b^2} + \&c. = \log.b + \frac{dx}{b} \right)$ convertitur in $\frac{a\,dx \sin.\varphi}{2b(\frac{dx}{b} + \log.b - \log.b)} = \frac{1}{2} a \sin.\varphi$.

11. Transeo nunc ad distantiam exquirendam centri gravitatis in Spatio infinito $BAST$ ab asymptoto

ES. Assumo itaque x infinitam in formula

$$\frac{a\,x\,fin.\,\varphi}{(2b+2x)\,[\,log.\,(b+x)-log.\,b\,]}$$, quae evidenter degenerat in $\frac{a\,x\,fin.\,\varphi}{2\,x\,log.\,x}=\frac{a\,fin.\,\varphi}{2\,log.\,x}$: quum vero $\frac{a\,fin.\,\varphi}{2\,log.\,x}$ quantitas sit manifesto infinitesima, consequens est, centrum gravitatis Spatii infiniti Hyperbolico-asymptotici *ABST* abesse infinito intervallo ab origine *BA*, proindeque ab asymptoto una *EQ*, infinitesimo ab asymptoto altera *ES*.

DISQUISITIO XI.

De Maximis et Minimis.

1. Praestantissima *Maximorum Minimorumque* Doctrina, quae nobiliorem utilioremque Differentialis Calculi partem constituit, nuperis hisce temporibus tot tantisque summorum Geometrarum laboribus exculta est, inventis ditata, & amplificata accessionibus, ut ad summum perfectionis fastigium perducta jam esse videatur. Attamen, tametsi uberrima rerum copia pulcherrimarum, quibus haec abundat Doctrina, nihil ferme spei relinquat, huic absolutissimae Theoriae adhuc posse nonnihil addi, spicilegium aliquod inter tam amplas messes ei faciendum superest, qui acrius ac sollertius Theoriam hanc in illis quantitatis variabilis functionibus experiri voluerit, quae originem sortiuntur ex functionibus aliis per se invicem multiplicatis, divisis, & ad quamcumque potestatem elevatis. Itaque operae pretium me facturum existimavi, si id ipsum in *Functionibus* primo *Rationalibus* utcumque

multiplicatis, divisis, &c. periclitarer, novis subinde detectis conditionibus ac regulis Maxima ac Minima functionum istarum definientibus, persecuturus posthac argumentum nobile ac splendidum in *Functionibus* quoque *Irrationalibus*, ac *Transcendentibus*, quae copiosius spicilegium pollicentur. Caeterum quando haec Maximorum Minimorumque Methodus ad ea Problemata solvenda adhibetur, in quibus quaeruntur Lineae Curvae Maximi alicujus Minimive proprietate gaudentes efficitur illud in nova Analysi mirificum ac prope singulare, quod ab inventore LA GRANGE *Calculi Variationum* nomine insignitum fuit; in quo scilicet quantitas, quae maxima aut minima esse debet, ita ad Curvam totam refertur, ut mutato quolibet ejus Curvae elemento, & ipsa mutetur. Et quamvis Problemata hujusmodi ante inventum Variationum Calculum Solutione haudquaquam carerent, ut videre est in absolutissimo Euleriano Opere de *Maximis ac Minimis*; attamen magno ipso *EULERO* non diffitente non omnia solutionem sat commodam vel ex toto analyticam admittebant, & nonnulla analysim vulgarem omnino respuere, vel certe transcendere videbantur, ut hinc etiam appareat quam longe absit, ut Differentialis Calculus cum Calculo Variationum confundi citra piaculum possit.

Esto X functio quaecumque τῦ x, sive algebraica, sive transcendens; si in ea ponatur ubivis $x + \varphi$ loco τῦ x, functio ipsa X recipit hanc formam

$$X + \frac{\varphi dX}{dx} + \frac{\varphi^2 ddX}{2dx^2} + \frac{\varphi^3 dddX}{2.3dx^3} + \frac{\varphi^4 d^4X}{2.3.4dx^4} + \&c.$$

DEMONSTRATIO.

Constat ex Calculi Differentialis principiis, functionem X posito $x + dx$ loco τῦ x abire in $X + dX$, & rursus in $X + dX$ posito $x + dx$ pro x augeri $X + dX$ differentiali suo $d.(X + dX)$, seu fieri $X + 2dX + ddX$, atque in hac iterum pro x posito $x + dx$ prodire $X + 2dX + ddX + d.(X + 2dX + ddX)$, hoc est $X + 3dX + 3ddX + dddX$; sicque porro deinceps. Atque hi quidem τῦ X valores respondent ipsius x valoribus $x + dx$, $x + 2dx$, $x + 3dx$ in X substitutis (*a*). Oritur igitur tabella:

(*a*) Esto $F.x$ functio quaecumque ipsius x, ponaturque $x + dx$ pro x; ea abit in $F.(x + dx)$. In hac iterum pro x pone $x + dx$, habebisque $F.(x + dx + dx)$, seu $F.(x + 2dx)$; quod quidem ipsum obvenisset, si in priori $F.x$ protinus posuisses $x + 2dx$ loco τῦ x. Sique iterum in $F.(x + 2dx)$ pones $x + dx$ pro x, obveniet $F.(x + 3dx)$; neque aliud prodiisset, si in $F.x$ posuisses ab initio $x + 3dx$ loco ipsius x. Eadem est de reliquis ratiocinatio.

Valores τȣ	— Valores respondentes τȣ
x	X
$x + dx$	$X + dX$
$x + 2dx$	$X + 2dX + ddX$
$x + 3dx$	$X + 3dX + 3ddX + dddX$
$x + 4dx$	$X + 4dX + 6ddX + 4dddX + d^4X$
$x + 5dx$	$X + 5dX + 10ddX + 10dddX + 5d^4X + d^5X$
$x + 6dx$	$X + 6dX + 15ddX + 20dddX + 15d^4X + 6d^5X + d^6X$
$x + 7dx$	$X + 7dX + 21ddX + 35dddX + 35d^4X + 21d^5X + 7d^6X + d^7X$
&c.	&c.

Nemo non videt, coefficientes valorum τȣ X congruere cum coefficientibus terminorum Binomii Newtoniani ad datam poteſtatem elevati. Ac proinde abeunte x in $x + ndx$ functio X abibit in formulam univerſalem

$$X + ndX + \frac{n.n-1.ddX}{2} + \frac{n.n-1\,n-2.dddX}{2.\ 3}$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2.n-3.d^4X}{2.\ 3.\ 4} + \text{\&c.}$$

Si jam fuerit n numerus infinitus, ſive omni aſſignabili major, evaneſcent in factoribus ſingulis $n-1$, $n-2$, $n-3$, &c. numeri -1, -2, -3, &c. prae infinito n, ac Formula contrahetur in ſequentem

$$X + ndX + \frac{n^2ddX}{2} + \frac{n^3dddX}{2.3} + \frac{n^4d^4X}{2.3.4} + \frac{n^5d^5X}{2.3.4.5}$$

$$+ \frac{n^6d^6X}{2.3.4.5.6} + \text{\&c.}$$

Ponatur finita quantitas $ndx = \varphi$, adeoque $n = \frac{\varphi}{dx}$; ac fiat ſubſtitutio. Induet functio X ex poſitione $x + ndx$, ſeu $x + \varphi$ loco ipſius x praeſcriptam formam

$$X + \frac{\varphi dX}{dx} + \frac{\varphi^2 ddX}{2dx^2} + \frac{\varphi^3 dddX}{2.3dx^3} + \frac{\varphi^4 d^4X}{2.3.4dx^4}$$

$$+ \frac{\varphi^5 d^5X}{2.3.4.5dx^5} + \text{\&c.}$$

Q. E. D.

2. Cor. Si quantitas negativa fuerit, hoc eſt $-\varphi$, praecedentis Formulae termini pares negativo ſigno afficientur, impares poſitivo, quod eſt per ſe manifeſtum. Igitur forma generaliſſima, in quam abit functio

X ex positione $x \pm \varphi$ pro x, repraesentatur per

$$X \pm \frac{\varphi dX}{dx} + \frac{\varphi^2 ddX}{2dx^2} \pm \frac{\varphi^3 dddX}{2.3dx^3} + \frac{\varphi^4 d^4X}{2.3.4dx^4} \pm \frac{\varphi^5 d^5X}{2.3.4.5dx^5} + \&c.$$

SCHOLION I.

3. Theorematis Formula aliquam habet analogiam cum Bernoulliana, quam videre est in *Act. Lips. ann.* 1694, & in *Oper. Joh. BERNOULLII tom. 1. n. 21.* Statuit BERNOULLIUS N quantitatem quomodocumque compositam ex indeterminatis & constantibus, invenitque

$$\int N dz = z\left(N - \frac{z dN}{2 dz} + \frac{z^2 ddN}{2.3dz^2} - \frac{z^3 dddN}{2.3.4dz^3} + \&c.\right).$$

Indirecta utitur methodo ad id ostendendum BERNOULLIUS, quod directe nulloque negotio ex notissimis Integralis Calculi scitis licet eruere quando N functio est τοῦ z. Cum enim sit $\int N dz = Nz - \int z dN$; si fiat $dN = N' dz$, erit rursus $\int z dN$, sive $\int N' z dz$

$= \frac{z^2 N'}{2} - \int \frac{z^2 dN'}{2}$. Posito iterum $dN' = N'' dz$, oritur $\int \frac{z^2 dN'}{2}$, seu $\int \frac{N'' z^2 dz}{2} = \frac{z^3 N''}{2.3} - \int \frac{z^3 dN''}{2.3}$: factoque rursus $dN'' = N''' dz$, habetur $\int \frac{z^3 dN''}{2.3}$, seu $\int \frac{N''' z^3 dz}{2.3} = \frac{z^4 N'''}{2.3.4} - \int \frac{z^4 dN'''}{2.3.4}$; sicque porro. Subrogatis hisce valoribus in priori formula $\int N dz$, ea invenietur $= z\left(N - \frac{z N'}{2} + \frac{z^2 N''}{2.3} - \frac{z^3 N'''}{2.3.4} + \&c.\right)$, hoc est assumpto dz constanti, $\int N dz = z\left(N - \frac{z dN}{2dz} + \frac{z^2 ddN}{2.3dz^2} - \frac{z^3 dddN}{2.3.4dz^3} + \&c.\right)$. Sed majorem habet formula nostra affinitatem cum Maclauriniana, quam videsis in eximio Opere *Treatise of Fluxions* §. 751., ubi expressa y per seriem $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c.$, in qua constantes singulae A, B, C, &c. poni etiam possunt, si opus fuerit, nihilo aequales, si evanescente z dicatur E valor τοῦ y, fluat vero uniformiter z, invenitur $y = E + \frac{z\,dE}{dz} + \frac{z^2 ddE}{2\,dz^2} + \frac{z^3\,dddE}{2.3\,dz^3} +$ &c. Maclauriniana demonstratio ita se habet: Quoniam $y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c., facto $z = o$, orietur $y = A$, sive ex hypothesi $= E$. Sumptis vero fluxionibus erit $\frac{dy}{dz} = B + 2\,Cz + 3\,Dz^2 +$ &c., & evanescente z fiet $B = \frac{dy}{dz} = \frac{dE}{dz}$. Acceptis rursus fluxionibus prodit $\frac{ddy}{dz^2} = 2\,C + 2.3\,Dz +$ &c., positoque $z = o$, habetur $C = \frac{ddy}{2\,dz^2}$, sive $= \frac{ddE}{2\,dz^2}$. Erutis iterum fluxionibus colligitur $\frac{dddy}{dz^3} = 2.3\,D +$ &c., & facto $z = o$, fit $D = \frac{dddy}{2.3\,dz^3}$, seu $= \frac{dddE}{2.3\,dz^3}$. Sicque porro, coefficientes reliqui determinantur. Igitur $y = A + Az + Cz^2 + Dz^3 +$ &c. $=$ $E + \frac{z\,dE}{dz} + \frac{z^2\,ddE}{2\,dz^2} + \frac{z^3\,dddE}{2.3\,dz^3} +$ &c.

Demonstrationem aliam elegantissima synthesi adornavit idem MACLAURINUS §. 255. Id ipsum jampridem invenerat TAYLORUS in profundissima Disquisitione de *Methodo Incrementorum*.

SCHOLION II.

4. Si X exprimatur generali formula $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 +$ &c., quod fieri semper potest vel accurate, vel quamproxime ut liquet, alia succurrit brevior Theorematis nostri demonstratio. Nam substituendo $x + \varphi$ pro x, abit formula in $A + B(x+\varphi) + C(x+\varphi)^2 + D(x+\varphi)^3 + E(x+\varphi)^4 + F(x+\varphi)^5 +$ &c. $=$

$+ A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 +$ &c. (M)

$+ B\varphi + 2Cx\varphi + 3Dx^2\varphi + 4Ex^3\varphi + 5Fx^4\varphi +$ &c. (N)

$+ C\varphi^2 + 3Dx\varphi^2 + 6Ex^2\varphi^2 + 10\,Fx^3\varphi^2 +$ &c. (O)

$+ D\varphi^3 + 4Ex\varphi^3 + 10\,Fx^2\varphi^3 +$ &c. (P)

$+ E\varphi^4 + 5\,Fx\varphi^4 +$ &c. (Q)

$+ F\varphi^5 +$ &c. (R).

Est vero, ut patet,

$$(M) = X,$$

$$(N) = \frac{\varphi d X}{dx},$$

$$(O) = \frac{\varphi^2 dd X}{2 dx^2},$$

$$(P) = \frac{\varphi^3 ddd X}{2.3\, dx^3},$$

$$(Q) = \frac{\varphi^4 d^4 X}{2.3.4\, dx^4},$$

$$(R) = \frac{\varphi^5 d^5 X}{2.3.4.5\, dx^5}, \text{ \&c.}$$

posita x aequabiliter fluente, hoc est $ddx = 0$. Igitur $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 +$ &c.

$$= X + \frac{\varphi d X}{dx} + \frac{\varphi^2\, dd\, X}{2\, dx^2} + \frac{\varphi^3\, ddd X}{2.3\, dx^3}$$

$$+ \frac{\varphi^4\, d^4\, X}{2.3.4\, dx^4} + \frac{\varphi^5\, d^5\, X}{2.3.4.5\, dx^5} + \text{\&c.}$$

Si φ negativo signo accipiatur, locorum parium termini hoc eodem signo affecti prodibunt. Inde vero fiet ge-

neraliter $A + B(x \pm \varphi) + C(x \pm \varphi)^2 + D(x \pm \varphi)^3$

$$+ \text{\&c.} = X \pm \frac{\varphi dx}{dx} + \frac{\varphi^2 dd X}{2dx^2} \pm \frac{\varphi^3 ddd X}{2.3\, dx^3} + \text{\&c.}$$

S C H O L I O N III.

5. Quantitas φ, quam finitam accepimus, assumi etiam potest utcumque parva, immo finita qualibet quantitate in immensum minor, hoc est infinitesima. Ad hoc enim satis est sumere dx infinitesimam secundi ordinis (quod late concessum, ut constat); tuncque fiet ndx, seu φ infinitesima ordinis primi, qualem nos in posterum habebimus.

D E F I N I T I O I.

6. Dicitur X *Functio Uniformis* τȣ̃ x, si valoribus singulis determinatis ipsius x singuli respondent determinati valores, non geminati, non plures Functionis X.

7. Cor. Functiones omnes Algebraicae Rationales, sive Integrae, sive Fractae, Uniformes sunt. Integrarum formula generalis est $a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + gx^5 +$ &c., Fractarum vero est

$$\frac{a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + \text{\&c.}}{a' + b'x + c'x^2 + e'x^3 + f'x^4 + \text{\&c.}}$$; atque ejusmodi expressiones, quemcumque variabili x valorem

O.

tribuas, nonnisi unicum valorem praebent, respondentem valori unico ipsius x.

DEFINITIO II.

8. Vocatur X *Functio Multiformis* τȣ̃ x, si pro unico valore determinato in locum x substituto, non unicum, sed plures determinatos valores praesefert.

9. Cor. 1. Functiones omnes Irrationales Multiformes sunt ob multiplicem valorem terminorum radicalium, quibus quantitas variabilis involvitur.

10. Cor. 2. Functio X Biformis, Triformis, Quadriformis, &c. erit, si ea determinetur per aequationem secundi, tertii, quarti, &c. gradus; ac generatim n:formis erit eadem X, seu pro unico valore τȣ̃ x valores diversos praeseferet numero n, si ea definiatur per aequationem $X^n - MX^{n-1} + NX^{n-2} - PX^{n-3} + QX^{n-4} - \&c. = 0$; in qua quidem aequatione quantitates M, N, P, Q, &c. functiones designant uniformes τȣ̃ x, estque M, ut compertum alias, summa omnium valorum Functionis X, N summa factorum ex binis, P summa factorum ex ternis, Q summa factorum ex quaternis, &c.

11. Cor. 3. Functiones quoque Transcendentes vel Uniformes esse possunt, vel Multiformes. Quin etiam in hisce habentur & *Infinitiformes*: nam Functiones Transcendentes $A\,\mathit{sin}.x$, $A\,\mathit{cos}.x$, $A\,\mathit{tang}.x$, $A\,\mathit{cot}.x$, $A\,\mathit{sec}.x$, $A\,\mathit{cosec}.x$, in quibus A designat arcum circuli habentem x sinum, vel cosinum, &c., Infinitiformes sunt ob infinitos arcus uni eidemque valori ipsius x respondentes.

12. Cor. 4. Si Functio Multiformis X unicum tantum exhibeat valorem realem pro valore quovis unico ipsius x, reliquis existentibus imaginariis, ea instar functionis Uniformis habebitur. Ita generatim $\left(a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + gx^5 + \&c.\right)^{\frac{m}{n}}$ functio est specie Multiformis, re Uniformis, si n sit numerus impar, m vero sive par, sive impar; in hoc enim casu unicus est, ut constat, Functionis valor realis, reliqui omnes imaginarii. Quod si n numerus fuerit par, Functio eadem vel Biformis erit, vel Nulliformis ob valorem ejus realem vel geminum, vel nullum in hac hypothesi, dummodo fractio $\frac{m}{n}$ minimis terminis fuerit expressa.

DEFINITIO III.

13. Functio X *Maximum* sortitur valorem A ex substitutione valoris determinati a in locum variabilis

x, si A major fuerit tum valoribus A', A'', A''', &c. proxime antecedentibus, tum valoribus $'A$, $''A$, $'''A$, &c. proxime sequentibus, quos successive acquirit eadem X ex aliquantulo tum incremento, tum decremento variabilis x ultra a. Vicissim Functio X *Minimum* obtinet valorem A respondentem valori determinato a in locum τῦ x subrogato, si A minor fuerit quam valores A', A'', A''' &c. proxime antecedentes, & $'A$, $''A$, $'''A$, &c. proxime consequentes, in quos successive abit ipsa X, si variabilis x vel aliquantulum augeatur ultra a, vel aliquantulum minuatur. Esto ex. gr. $X = \frac{a^3}{x^2 - 2bx + b^2 + c^2}$, quae oritur *Maxima* ponendo $x = b$, fitque $X = \frac{a^3}{c^2}$; si enim variabilem x tantillum sive augeas, sive minuas ultra b, sumasque $x = b \pm \omega$ (accepta ω utcumque parva) fiet semper $X = \frac{a^3}{c^2 + \omega^2} < \frac{a^3}{c^2}$. Si vicissim fuerit $X = x^2 - 2fx + f^2 \pm g^2$, ea *Minima* evadet, nimirum $= \pm g^2$, posito f pro x; propterea quod accepta x aliquantillum sive majori, sive minori quam f, videlicet facta $x = f \pm \omega$, oritur in utroque casu $X = \pm g^2 + \omega^2 > \pm g^2$.

PRÆNOTATIO.

14. Designantibus P, Q, R, T, &c. functiones rationales integras τῦ x, & p, q, r, t, &c. numeros integros positivos, atque etiam nihilum, Functio nostra X (quam hic rationalem integram supponimus) ad sex formas sequentes opportune ac commode revocabitur:

1.° $X = P$;

2.° $X = PQ$;

3.° $X = PQRT \ldots$ &c.;

4.° $X = P^p$;

5.° $X = P^p Q^q$;

6.° $X = P^p Q^q R^r T^t \ldots$ &c.

PARS I.

De Maximis ac Minimis Functionum Rationalium Integrarum.

PROBLEMA I.

15. Invenire Maximum, ac Minimum valorem Functionis integrae $X = P$.

SOLUTIO.

Ad hoc praestandum invenire oportet valorem determinatum variabilis x, qui loco τȣ̃ x in Functione X, vel P subrogatus eam reddat Maximam, Minimamve. Sit igitur 1.° x talis qualis oportet, ut valor Functionis X *Maximus* fiat. Si jam in hac hypothesi augeatur x quantitate utcumque parva φ, ac substituatur $x + \varphi$ loco τȣ̃ x in Functione X, series inde orta

$$(1.)\ X + \frac{\varphi\, dX}{dx} + \frac{\varphi^2\, ddX}{2\, dX^2} + \frac{\varphi^3\, dddX}{2.3\, dx^3} + \frac{\varphi^4\, d^4 X}{2.3.4\, dx^4}$$

$+$ &c. minor erit (13.), quam X: ac similiter si x minuatur utcumque minima quantitate φ, & pro x ponatur ubivis $x - \varphi$ in expressione Functionis X, valor seriei, in quam abit ipsa X, hoc est $(2.)\ X - \frac{\varphi\, dX}{dx}$

$$+ \frac{\varphi^2\, ddX}{2\, dx^2} - \frac{\varphi^3\, dddX}{2.3\, dx^3} + \frac{\varphi^4\, d^4 X}{2.3.4\, dx^4} - \text{\&c.},$$ minor

iterum erit (13.), quam X. Igitur tam $\frac{\varphi\, dX}{dx} + \frac{\varphi^2\, ddX}{2\, dx^2}$

$$+ \frac{\varphi^3\, dddX}{2.3\, dx^3} + \frac{\varphi^4\, d^4 X}{2.3.4\, dx^4} + \text{\&c., quam } - \frac{\varphi\, dX}{dx}$$

$$+ \frac{\varphi^2\, ddX}{2\, dx^2} - \frac{\varphi^3\, dddX}{2.3\, dX^3} + \frac{\varphi^4\, d^4 X}{2.3.4\, dx^4} - \text{\&c.}$$ nega-

tiva quantitas erit. Id vero neutiquam eveniret, nisi foret $\frac{\varphi\, dx}{dx} = 0$; propterea quod posita φ in immensum minore quantitate qualibet data, & consequenter evanescentibus prae ipsa φ potestatibus altioribus φ^2, φ^3, &c., series $\frac{\varphi\, dX}{dx} + \frac{\varphi^2\, ddX}{2\, dx^2} + \frac{\varphi^3\, dddX}{2.3\, dx^3} + \frac{\varphi^4\, d^4 X}{2.3.4\, dx^4}$ $+$ &c. contrahitur in unicum terminum $\frac{\varphi\, dX}{dx}$, similiterque series $- \frac{\varphi\, dX}{dx} + \frac{\varphi^2\, ddX}{2\, dx^2} - \frac{\varphi^3\, dddX}{2.3\, dx^3} + \text{\&c.}$ redigitur ad terminum unicum $- \frac{\varphi\, dX}{dx}$; quorum terminorum $+ \frac{\varphi\, dX}{dx}$, $- \frac{\varphi\, dX}{dx}$ alter semper est affirmativus, alter semper negativus. Ergo in casu *Maximi* proveniet semper $\frac{\varphi\, dX}{dx}$, seu $\frac{dX}{dx} = 0$.

Sit 2.° x talis, qualem postulat valor *Minimus* Functionis X, ita ut si augeatur, ac minuatur ipsa x quantitate infinitesima φ, valor uterque Functionis X, ex positione $x + \varphi$, & $x - \varphi$ pro x, resultans, hoc est

(1.) $X + \frac{\varphi d X}{dx} + \frac{\varphi^2 dd X}{2 dx^2} + \frac{\varphi^3 ddd X}{2.3 dx^3}$ + &c., nec non $X - \frac{\varphi d X}{dx} + \frac{\varphi^2 dd X}{2dx^2} - \frac{\varphi^3 ddd X}{2.3.dx^3} + \frac{\varphi^4 d^4 X}{2.3.4dx^4}$ — &c. major ſit (13.), quam X. Ergo tam ſeries $\frac{\varphi d X}{dx} + \frac{\varphi^2 dd X}{2 dx^2} + \frac{\varphi^3 ddd X}{2.3 dx^3}$ + &c., quam ſeries altera $- \frac{\varphi d X}{dx} + \frac{\varphi^2 ddx}{2 dx^2} - \frac{\varphi^3 ddd X}{2.3 dx^3}$ + &c. valorem exhibebit poſitivum; quod tamen fieri nequit, niſi ponatur $\frac{\varphi d X}{dx} = 0$, quum ſeries prior aequetur ſoli $\frac{\varphi d X}{dx}$, poſterior ſoli $-\frac{\varphi d X}{dx}$, quorum quidem valorum alter eſt neceſſario affirmativus, alter neceſſario negativus. Igitur etiam in caſu *Minimi* fiet $\frac{d X}{dx} = 0$.

Facta itaque $\frac{d X}{dx} = 0$, aequationis hujus radices, ſeu valores τῦ x inde eruti, & in expreſſione X ſubrogati, *Maximum*, *Minimumve* (ſi quis erit) Functioni X valorem inducent.

Ut autem nunc diſpiciatur quandonam Functionis X valor *Maximus* erit, quandonam *Minimus*, quandonam neuter (nam & hoc fieri poteſt), attendenda ſedulo eſt ſeries (B) $\pm \frac{\varphi dX}{dx} + \frac{\varphi^2 dd X}{2 dx^2} \pm \frac{\varphi^3 ddd X}{2.3 dx^3} + \frac{\varphi^4 d^4 X}{2.3.4 dx^4} \pm \frac{\varphi^5 d^5 X}{2.3.4.5 dx^5}$ + &c. reſpondens duplici poſitioni $x \pm \varphi$ pro x. Si ſecundus ſeriei terminus $\frac{\varphi^2 dd X}{2 dx^2}$, ſubſtituendo valorem τῦ x erutum ex aequatione $\frac{dX}{dx} = 0$, prodeat negativus, adeoque & negativum valorem exhibeat fluxio ſecunda $\frac{ddX}{dx^2}$ (poſita ſemper dx conſtante), Functionis X valor *Maximus* erit, ob valorem nimirum negativum totius ſeriei (B), quae evaneſcente primo termino, & reliquis poſt ſecundum in immenſum prae ipſo decreſcentibus ad ſolum ſecundum terminum redigitur.

Contra Functionis X valor *Minimus* erit, ſi ſecundus ſeriei terminus $\frac{\varphi^2 dd X}{2 d x^2}$, adeoque & ſecunda fluxio $\frac{ddX}{dx^2}$ poſitivum valorem praebeat ex ſubſtitutione radicis aequationis $\frac{dX}{dx} = 0$; hinc enim fiet, ut ſeries tota (B), quae uni ſecundo termino aequivalet, valorem obtineat poſitivum.

At vero Functionis X valor neque *Maximus* erit, neque *Minimus*, ſi ſecundus ipſe terminus $\frac{\varphi^2 ddX}{2dx^2}$, ſeu $\frac{ddX}{dx^2}$ ſubſtituta radice aequationis $\frac{dX}{dx} = 0$ evadat nihilo aequalis, dummodo per eandem ſubſtitutionem una cum ſecundo non evaneſcat quoque tertius ſeriei terminus $\pm \frac{\varphi^3 dddX}{2.3\, dx^3}$: Quippe nulleſcente ex hypotheſi ſecundo termino, ac ſubſiſtente tertio tota ſeries ob terminos reliquos poſt tertium in infinitum prae ipſo decreſcentes aequipollet tantummodo eidem tertio, qui cum ex duplici poſitione $x + \varphi$, & $x - \phi$ loco τῶ x duplicem praeſeferat valorem $\pm \frac{\varphi^3 dddX}{2.3\, dx^3}$, alterum ſcilicet neceſſario poſitivum, alterum neceſſario negativum, ſeriei ipſi (B) binos oppoſitos valores

inducit. Hoc autem repugnat cum *Maximi*, tum *Minimi* indoli, quorum illud exigit, ut valor uterque ſeriei (B) ex poſitione $x + \varphi$, & $x - \varphi$ pro x oriundus ſit negativus; iſtud vero poſtulat, ut uterque ipſe valor ſit poſitivus.

Quod ſi contingat, ut per ſubſtitutionem radicis aequationis $\frac{dX}{dx} = 0$ una cum ſecundo ſeriei (B) termino tertius quoque nulleſcat, criterium petendum erit ex termino quarto $\frac{\varphi^4 d^4 X}{2.3.4\, dx^4}$, vel etiam ex quarta fluxione $\frac{d^4 X}{dx^4}$, quae nimirum, ſi per ſubſtitutionem praedictae radicis valorem praeferat negativum, indicabit *Maximum*; ſi valorem induat poſitivum, indicabit *Minimum*; ſi valorem praebeat nihilo aequalem, dummodo ſubſequens terminus quintus $\pm \frac{\varphi^5 d^5 X}{2.3.4.5\, dx^5}$ facta eadem ſubſtitutione non evaneſcat ſimul, neque *Maximum*, neque *Minimum* indicabit.

Ac ſi quintus ipſe ſeriei terminus $\pm \frac{\varphi^5 d^5 X}{2.3.4.5\, dx^5}$

per ſubſtitutionem valoris τȣ̃ x ex aequatione $\frac{dX}{dx} = 0$ eruti evaneſcat una cum quatuor terminis praecedentibus, legem ac normam dabit ſubſequens terminus ſextus $\frac{\varphi^6 d^6 X}{2.3.4.5.6\, dx^6}$, ad quem unice (dummodo & is non evaneſcat) ſeries tota (B) reducitur, terminis reliquis poſt ſextum in infinitum prae ipſo imminutis. Valor quippe negativus ejus termini functionem X de more *Maximam* arguet; poſitivus *Minimam*; nulleſcens, neque *Maximam*, neque *Minimam*, permanente tamen termino ſeptimo $\pm \frac{\varphi^7 d^7 X}{2.3.4.5.6.7\, dx^7}$ alternatim poſitivo, ac negativo.

Nam ſi & terminus ſeptimus una cum praecedentibus per ſubſtitutionem valoris τȣ̃ x prodeat nihilo aequalis, ex octavo termino $\frac{\varphi^8 d^8 X}{2.3.4.5.6.7.8\, dx^8}$ petenda erit norma; qui ſane terminus ſi per illam ſubſtitutionem oriatur negativus, Functio X habebitur de more *Maxima*; ſi poſitivus, *Minima*: ſi prodeat nullus ſubſiſtatque terminus nonus alterna vice poſitivus, & negativus $\pm \frac{\varphi^9 d^9 X}{2.3.4.5.6.7.8.9\, dx^9}$, Functio X neque *Maxima* erit, neque *Minima*.

Par erit in ſequentibus ratiocinatio, cujus unicum fundamentum eſt, quod ſeries (B) negativa eſſe debet pro valore *Maximo* Functionis X; poſitiva pro *Minimo*; alternis poſitiva, & negativa pro neutro.

Igitur Functio X *Maxima* erit, vel *Minima*, ſi ſeriei (B) termini ſucceſſivi, ſimul evaneſcentes, fuerint numero impares, ſive unus, ſive tres, ſive quinque &c; *Maxima* quidem, ubi ſeriei (B) terminus poſt ultimum evaneſcentem ſuperſtes prodeat negativus, *Minima* ſi poſitivus. At nec *Maxima* erit, nec *Minima*, ubi ſucceſſivi termini ſimul evaneſcentes ſeriei ejuſdem ſint numero pares, nimirum vel bini, vel quatuor, vel ſex, &c.

Allata eſt ergo methodus inveniendi valores *Maximos*, *Minimoſque* Functionis $X = P$; traditum criterium diſtinguendi inter utroſque, hoſque ab illis internoſcendi; propoſita demum norma ipſorum etiam abſentiam dignoſcendi. *Q. E. I.*

SCHOLION I.

16. Hinc luculentiſſime patet, aequationem $\frac{dX}{dx} = 0$ ſemper neceſſario locum habere quoties Functio

X *Maximum* aliquem, *Minimumve* valorem adipiſcitur; at ſimul etiam patet, haudquaquam veram eſſe propoſitionem converſam, *Maximum* ſcilicet, vel *Minimum* aliquem valorem Functioni X ſemper neceſſario ineſſe quando aequatio $\frac{dX}{dx} = 0$ locum habet. Nam ſi una cum fluxione hac prima Functionis X evaneſcat, per ſubſtitutionem valoris τȣ̃ x inde hauſti, fluxio quoque ſecunda; aut cum hiſce duabus evaneſcat tertia ſimul, & quarta; aut cum iſtis quatuor quinta etiam, & ſexta; ſicque numerus par quicumque fluxionum ſucceſſivarum annihiletur, Functio X nec Maximum ullum, nec Minimum valorem exhibebit, quantumvis aequationis $\frac{dX}{dx} = 0$ radices in ipſa X ſatagas ſubrogare. Itaque dupliciter offendit vulgata methodus plerorumque Geometrarum, magni oppido nominis, ac de Matheſi alias praeclare meritorum, qui aequationem unicam $\frac{dX}{dx} = 0$ normam ſtatuunt ac regulam detegendi Maxima, ac Minima. Ea quippe aequatio 1.° nec ſemper, nec neceſſario Maximum, Minimumve indicat; nec 2.° Maximis, Minimiſque a ſe invicem diſtinguendis par eſt. Ita ſi proponatur ex. gr. functio $X = x^4 - (3a + b)x^3 + (3a^2 + 3ab)x^2 - (a^3 + 3a^2b)x + ba^3$, cujus inveſtigandi ſint valores *Maximi*, *Minimive*; facta $\frac{dX}{dx} = 0$, ſeu $4x^3 - (9a + 3b)x^2 + (6a^2 + 6ab)x - a^3 - 3a^2b = 0$, ſeu $x^3 - \frac{(9a + 3b)x^2}{4} + \frac{(6a^2 + 6ab)x}{4} - \frac{a^3 + 3a^2b}{4} = 0$, ex hujus aequationis reſolutione prodeunt ipſius radices a, a, $\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b$. Neque tamen propterea radix a in Functione X ſubſtituta Maximum, Minimumve valorem eidem inducit: ex hac quippe ſubſtitutione oritur $X = 0$; valor autem hunc proxime antecedens, ponendo $a - \omega$ pro x, eſt $-(a - b - \omega)\omega^3$, ac valor eum proxime ſubſequens, poſito $a + \omega$ loco τȣ̃ x, eſt $(a - b + \omega)\omega^3$, quorum prior, imminuto in immenſum ω, eſt idem cum $-(a - b)\omega^3$, alter cum $(a - b)\omega^3$, ſive alter neceſſario poſitivus, alter negativus, nimirum hic minor valore intermedio $X = 0$, ille major; ac proinde valor ipſe intermedius $X = 0$ nec Maximus eſſe poteſt, nec Minimus (13); quod a vulgari methodo incertum relinquitur. Id vero ipſum luculenter indicat ſuperior methodus, quum ſecunda fluxio $\frac{ddX}{dx^2} = 12x^2 - (18a + 6b)x + 6a^2 + 6ab$

per substitutionem τῷ a loco x evanescat, tertia autem fluxio $\frac{dddX}{dx^3} = 24x - 18a - 6b$ per eandem substitutionem haudquaquam evanescat abiens in $6a - 6b$, quae assumptis, ut supponimus, a, & b inaequalibus nequit esse nihilo aequalis. Si praeterea in Functione X loco τῷ x radix tertia $\frac{a+3b}{4}$ aequationis $\frac{dX}{dx} = 0$ subrogetur, abit functio ipsa in $-\frac{1}{3}\left(\frac{3b-3a}{4}\right)^4$, qui sane valor Maximus, an Minimus, an neuter sit, per vulgarem methodum non sit manifestum; adhibito autem criterio superiori statim liquet, valorem hunc Minimum esse ob secundam fluxionem $\frac{ddX}{dx^2} = \frac{36}{16} \times (a-b)^2$ positivam. Vel ex hoc unico exemplo perspicue intelligitur, quantum vulgari praestet methodus in antecedenti Problemate exposita ac demonstrata; quae & simplicissima est, & certissimis innixa principiis, & evidentissimis notionibus deducta, & ad quantitates functionesque omnium generum latissime patens.

Caeterum quum functio quaelibet quantitatis variabilis x per Curvae alicujus ordinatam rite exprima-

tur, ut Geometrae compertum habent, hinc est, ut universalis Maximorum ac Minimorum methodus cum Problemate inveniendi Maximas, Minimasque Curvarum ordinatas undequaque consentiat. Manifestum porro est ex Curvarum indole ac genesi, ordinatae Maximae respondere radium osculi, seu Evolutae positivum, Minimae negativum: Cumque, assumpta ordinata X, ac fluente aequabiliter abscissa x, radii osculatoris formula sit $\frac{\left(1+\frac{dX^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{-ddX}{dx^2}}$, quae existente X Maxima, aut Minima, adeoque $\frac{dX}{dx} = 0$, abit in $-\frac{dx^2}{ddX}$, erit propterea quantitas $-\frac{dx^2}{ddX}$ positiva in hypothesi ordinatae Maximae, negativa in hypothesi Minimae, & consequenter ddX negativa pro Maxima ordinata, seu pro valore Maximo functionis X, positiva pro Minima ordinata, seu pro Minimo valore functionis ejusdem; prorsus ut supra.

SCHOLION II.

17. Poſita generatim functione integra X, ſeu $P = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + Hx^7 +$ &c., cujus Maxima ac Minima determinantur per radices aequationis $\frac{dP}{dx} = 0$, ſeu $B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + 6Gx^5 + 7Hx^6 +$ &c. $= 0$, ſi hujus aequationis radices reales, & inaequales ſecundum ordinem magnitudinis diſpoſitae dicantur, a, b, c, e, f, &c., ſitque adeo $a > b$, $b > c$, $c > e$, $e > f$, &c., harum unaquaeque functioni P valorem Maximum, vel Minimum tribuet. Etenim poſito V pro factore aequationis $\frac{dP}{dx} = 0$ radices imaginarias, ſi quae ſunt, involvente, habebitur $\frac{dP}{dx} = (x-a) \times (x-b)(x-c)(x-e)(x-f) \ldots V = 0$; ac proinde

$$\begin{aligned}\frac{ddP}{dx^2} = {} & (x-b)(x-c)(x-e)(x-f) \ldots V \\ & + (x-a)(x-c)(x-e)(x-f) \ldots V \\ & + (x-a)(x-b)(x-e)(x-f) \ldots V \\ & + (x-a)(x-b)(x-c)(x-f) \ldots V \\ & + (x-a)(x-b)(x-c)(x-e) \ldots V\end{aligned}$$

$+ \ldots\ldots + (x-a)(x-b)(x-c)(x-e)(x-f) \ldots \times \frac{dV}{dx}$: In hac porro aequalitate ſubſtituendo 1.° a loco τȣ̃ x oritur $\frac{ddP}{dx^2} = (a-b)(a-c)(a-e)(a-f) \ldots M$ (abeunte V in M ex illa ſubſtitutione); qui ſane valor, ob M ſemper poſitivum, & factores $a-b$, $a-c$, &c. pariter poſitivos, nequit non eſſe poſitivus: Atque hinc radix prima, ſeu maxima a valorem Minimum functioni P largietur (15.). Subſtituatur 2.° in eadem $\frac{ddP}{dx^2}$ radix ſecunda b pro x; fiet $\frac{ddP}{dx^2} = (b-a)(b-c) \times (b-e)(b-f) \ldots V$, quae ob factorem unum $b-a$ negativum, reliquos autem poſitivos negativa eſt, indicatque iccirco (15.) functionem P Maximam oriri ex radice ſecunda b. Ponatur 3.° pro x radix tertia c; prodibit $\frac{ddP}{dx^2} = (c-a)(c-b)(c-e)(c-f) \ldots V$, ſeu poſitiva ob factores duos $c-a$, $c-b$, negativos, & reliquos poſitivos. Itaque radix tertia c functionem P Minimam reddit (15.). Subſtituatur 4.° radix quarta e; orietur $\frac{ddP}{dx^2} = (e-a)(e-b)(e-c)(e-f) \ldots V$, hoc est negativa ob priores tres factores negativos, reliquos positivos; proindeque radix quarta e functionem P Maximam praebet. Substituta 5.° similiter radice quinta f, abit $\frac{ddP}{dx^2}$ in $(f-a)(f-b)(f-c)(f-e)\ldots V$, quae ob factores quatuor priores negativos, reliquos autem positivos quantitas est positiva, arguitque propterea (15.) functionis P valorem, ex quinta radice f oriundum, Minimum fore. Eadem porro ratiocinatione inveniemus, tot haberi valores Maximos, Minimosque in functione P, quot habentur radices reales & inaequales in aequatione $\frac{dP}{dx} = 0$; ita quidem, ut facta radicum ipsarum distributione secundum ordinem quantitatis earundem, primumque locum maxima, postremum minima occupante, ac caeteris ordinatim loca intermedia tenentibus, radices omnes locorum imparium, prima, tertia, quinta &c. Functionem P Minimam exhibeant, radices autem locorum parium, secunda, quarta, sexta, &c. Maximam praebeant. Id ipsum quoque demonstrabitur, ubi radicum inaequalium a, b, c, e, f, &c. aliquae, vel etiam omnes negativae fuerint. Si enim ex. gr. e, & f negativae accipiantur, hoc

est $-e$, $-f$, sitque ratione distributionis $-e > -f$, ac propterea $f > e$; in allatis expressionibus valorum formulae $\frac{ddP}{dx^2}$ mutabuntur ubique signa quantitatum e, & f, semperque adhibito examine deprehendetur ipsius $\frac{ddP}{dx^2}$ valor positivus ex prima radice, negativus ex secunda, positivus iterum ex tertia, negativus ex quarta, &c.; prorsus ut ante.

At si aequatio $\frac{dP}{dx} = 0$ radices habeat aequales numero n, ita ut factor unus aequationis ipsius sit $(x-h)^n$ designante h radicem aequalem, factor vero alter, si ullus fuerit, radices inaequales, nec non imaginarias involvens dicatur T, sitque propterea $\frac{dP}{dx} = 0 = (x-h)^n.T$; invenietur $\frac{ddP}{dx^2} = n(x-h)^{n-1}.T + (x-h)^n.\frac{dT}{dx}$;

$\frac{d^3P}{dx^3} = n.n-1.(x-h)^{n-2}.T + 2n(x-h)^{n-1}.\frac{dT}{dx}$
$+ (x-h)^n.\frac{ddT}{dx^2}$; $\frac{d^4P}{dx^4} = n.n-1.n-2.(x-h)^{n-3}.T$

$+3n.n-1.(x-h)^{n-2}.\frac{dT}{dx} + 3n(x-h)^{n-1}.\frac{ddT}{dx^2}$
$+(x-h)^n.\frac{d^3T}{dx^3}$; $\frac{d^5P}{dx^5} = n.n-1.n-2.n-3.(x-h)^{n-4}.T$
$+4n.n-1.n-2.(x-h)^{n-3}.\frac{dT}{dx} + 6n.n-1.(x-h)^{n-2} \times$
$\frac{ddT}{dx^2} + 4n(x-h)^{n-1}.\frac{d^3T}{dx^3} + (x-h)^n.\frac{d^4T}{dx^4}$; atque ita porro innotefcet, fluxionem $(n+1)$:esimam ipfius P, feu $\frac{d^{n+1}P}{dx^{n+1}}$ conftare ex primo termino $n(n-1)(n-2)\times(n-3)(n-4)(n-5)\ldots.(x-h)^{n-n}.T$, feu $n(n-1)\times(n-2)(n-3)\ldots\ldots T$, ex fecundo termino habente factorem $x-h$, ex tertio termino habente factorem $(x-h)^2$, ex quarto, cujus factor erit $(x-h)^3$, denique ex ultimo adaequate $\frac{(x-h)^n d^nT}{dx^n}$. Subrogata nunc in hifce fluxionis $\frac{d^{n+1}P}{dx^{n+1}}$ terminis radice h pro x, evanefcunt omnes praeter primum, abeunte $\frac{d^{n+1}P}{dx^{n+1}}$ in $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ldots..T$. Itaque jam

fit manifeftum, per radicem aequalem h Maximum aliquem, Minimumve valorem functionis P obtineri (15.), fi fluxio $\frac{d^{n+1}P}{dx^{n+1}}$ poft ultimam evanefcentem fuperftes fuerit ordinis paris, hoc eft fi numerus n impar fuerit; contra vero functionem P nec Maximam, nec Minimam oriri, ubi fluxio illa gradum imparem habuerit, & confequenter numerus n fuerit par. Hinc porro palam eft, quoties aequatio $\frac{dP}{dx} = 0$ radices aequales habeat numero impares, tres, quinque, feptem, &c., functionem P ex fubftitutione radicis ejufdem aequalis fieri vel Maximam, vel Minimam; ac viciffim quotiefcumque praedicta aequatio parem numerum complectatur radicum aequalium, duas, quatuor, fex, &c. functionem P ex illa fubftitutione nec Maximam, nec Minimam evadere.

Quod fi fuerit vel factor $T=1$, vel idem T complectatur radices tantum imaginarias; feu quod idem eft, fi aequationis $\frac{dP}{dx} = 0$ radices omnes vel fuerint reales & aequales, vel reliquae praeter aequales ipfas fuerint imaginariae; praebebit utroque cafu radix aequalis valorem Minimum functionis P, supposito impari radicum omnium numero; supposito autem hoc numero pari functio P nec Minima evadet, nec Maxima. Nam existente n numero pari (quo in casu ex demonstratis functio P nec Maxima fieri potest, nec Minima), par quoque esse debet numerus radicum omnium aequationis $\frac{dP}{dx} = 0$, quum reliquarum radicum imaginariarum in factore T contentarum nonnisi par numerus esse possit, uti ex Algebra constat. Itaque nullum erit Maximum, neque Minimum functionis P, si par fuerit numerus radicum omnium aequationis $\frac{dP}{dx} = 0$ continentis radices tantum aequales, & reliquas imaginarias. Contra vero, ubi radicum aequalium numerus impar fuerit, atque adeo impar numerus radicum omnium additis scilicet reliquis imaginariis factoris T semper numero paribus, Minima oritur functio P ex substitutione radicis aequalis (15.) ob valorem affirmativum fluxionis paris $\frac{d^{n+1} P}{dx^{n+1}} = n(n-1)(n-2) \times (n-3)(n-4)(n-5) \ldots\ldots T$, in qua factor T ex substitutione quantitatis cujusvis pro x nunquam non invenitur affirmativus.

Eadem omnino demonstratione conficitur, supposita $\frac{dP}{dx} = 0 = (x-g)^m (x-h)^n (x-l)^r \ldots T$, hoc est datis in aequatione $\frac{dP}{dx} = 0$ radicibus aequalibus g numero m, aequalibus radicibus h numero n, aequalibus radicibus l numero r, &c., caeterisque inaequalibus, & imaginariis in factore T contentis, radices ipsas g, h, l, &c. valorem Maximum, Minimumve functioni P conciliare, si earum numeri m, n, r, &c. impares fuerint; neutrum dare, si pares. Huc usque dicta in radices aequales positivas perinde ac negativas adamussim quadrare, notum est quam quod maxime. Neque minus perspicuum est, facta simul radicum omnium aequalium & inaequalium distributione secundum ordinem quantitatis radices omnes locorum imparium (sive aequales eae fuerint, sive inaequales) functionem P Minimam exhibere, locorum parium Maximam, ubi tamen radices aequales numero impares fuerint, paribus scilicet neutrum praebentibus.

18. Ex hactenus demonstratis sequentes Canones eximiae utilitatis, maximique usus deducuntur.

CANON I.

Ad Maxima, aut Minima Functionis X detegenda fluxionem ejus primam $\frac{dX}{dx}$ nihilo aequalem ponito, hujusque radices loco x in functione illa subrogato: tum facta eadem substitutione in fluxione secunda $\frac{ddX}{dx^2}$ accidet, ut vel 1.° ejus valor prodeat negativus; vel 2.° oriatur affirmativus; vel 3.° sit nullus, nec talis sit tamen fluxionis tertiae $\frac{dddX}{dx^3}$ valor ex illa substitutione proveniens. Si primum contingat, functionem X Maximam credito, si alterum, Minimam; si tertium, nec Maximam, nec Minimam judicato.

CANON II.

19. At si tertiae quoque fluxionis $\frac{dddX}{dx^3}$ valor ex eadem substitutione evanescat, ex quarta fluxione $\frac{d^4X}{dx^4}$ criterium petito; ex hujus nimirum valore negativo functionem X Maximam reputato, ex affirmativo Minimam, ex nullo (dummodo non evanescat simul fluxio quinta $\frac{d^5X}{dx^5}$) nec Maximam, nec Minimam habeto.

CANON III.

20 In universum, si fluxionum successivarum functionis X numerus impar quicumque evanescat, functionem ipsam X vel Maximam, vel Minimam pronunciato; Maximam, si fluxionis superstitis post ultimam evanescentem valor fuerit negativus; Minimam, si affirmativus.

CANON IV.

21. At nec Maximam, nec Minimam functionem X habeto, si fluxionum ipsius successivarum numerus par quicumque nihilo aequalis oriatur.

CANON V.

22. Si aequationis $\frac{dX}{dx} = 0$ radices omnes reales secundum ordinem magnitudinis disponantur, primusque locus maximae, postremus minimae tribuatur, locaque intermedia a radicibus intermediis ordinatim occupentur, functionem X oriri Maximam pro certo habeto ex radicibus inaequalibus locorum parium, Minimam ex

radicibus inaequalibus locorum imparium; idemque judicato de radicibus aequalibus ejuſdem ſpeciei ubi tamen ipſarum numerus impar fuerit.

PROBLEMA II.

Invenire Maxima, aut Minima functionis integrae $X = PQ$.

SOLUTIO.

Patet ex praecedenti Problemate, Maxima aut Minima, ſi quae ſunt, functionis X, ſeu PQ per radices aequationis $\frac{dX}{dx} = 0$, ſeu $\frac{PdQ + QdP}{dx} = 0$ indubitanter obtineri. Maxima autem fiet functio PQ, ſi fluxio ſecunda $\frac{ddX}{dx^2}$, ſeu $\frac{PddQ + 2dPdQ + QddP}{dx^2}$ negativa fuerit; Minima, ſi affirmativa; nec Maxima vero, nec Minima, ſi fluxio eadem nulleſcat, permaneatque fluxio tertia $\frac{d^3X}{dx^3}$, hoc eſt

$$\frac{Pd^3Q + 3dPd^2Q + 3d^2PdQ + Qd^3P}{dx^3},$$

ſicque porro per Probl. praec. pronum erit inferre, functionem PQ Maximam fore, ubi evaneſcente numero quovis impari fluxionum ſucceſſivarum functionis ipſius fluxio ſubſequens negativa deprehendatur; Minimam; ubi haec prodeat affirmativa; at neque Maximam, neque Minimam, ubi numerus fluxionum earundem evaneſcentium fuerit par. $Q.E.I.$

SCHOLION.

24. Calculum ineunti conſtabit, fluxionem quartam ipſius PQ fore $Pd^4Q + 4dPd^3Q + 6d^2Pd^2Q + 4d^3PdQ + Qd^4P$, fluxionem quintam prodire $Pd^5Q + 5dPd^4Q + 10d^2Pd^3Q + 10d^3Pd^2Q + 5d^4PdQ + Qd^5P$. Hinc ad fluxionem n:$^{\text{eſimam}}$ functionis PQ obtinendam ſat erit ſeries binas ordinare

$$P,\ dP,\ d^2P,\ d^3P,\ d^4P,\ d^5P,\ \ldots\ldots,\ d^nP$$

$$d^nQ,\ d^{n-1}Q,\ d^{n-2}Q,\ d^{n-3}Q,\ d^{n-4}Q,\ d^{n-5}Q,\ \ldots\ldots,\ Q,$$

ac unius terminos per terminos alterius infra ſibi reſpondentes multiplicare, productiſque ſingulis praefigere coefficientes binomii Newtoniani ad poteſtatem n elevati. Ita fluxio n:$^{\text{eſima}}$ functionis PQ fiet $Pd^nQ + ndPd^{n-1}Q$

$$+ \frac{n.n-1}{2} \cdot d^2Pd^{n-2}Q + \frac{n.n-1.n-2}{2.3} \cdot d^3Pd^{n-3}Q$$

$$+ \frac{n.n-1.n.-2.n-3}{2.3.4}\, d^4Pd^{n-4}Q$$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots + Qd^nP$. Eadem ratiocinatione licebit demonſtrare, fluxionem n:esimam functionis PQR eſſe $Pd^n . QR + ndPd^{n-1} . QR$

$$+ \frac{n . n-1}{2} . d^2Pd^{n-2} . QR + \frac{n . n-1 . n-2}{2 . 3} \times$$

$$d^3Pd^{n-3} . QR + \frac{n . n-1 . n-2 . n-3}{2 . 3 . 4} . d^4Pd^{n-4} . QR$$

$+ \ldots\ldots QRd^nP$, ubi $d^n . QR$, $d^{n-1} . QR$, $d^{n-2} . QR$, &c. indicant fluxiones n:esimam, (n—1):esimam, (n—2):esimam functionis QR prius inventas. Haud diſſimili methodo innoteſcet fluxionem n:esimam functionis $PQRT\ldots$ ex quolibet factorum numero coaleſcentis prodire $Pd^n . QRT\ldots + ndPd^{n-1} . QRT\ldots + \frac{n . n-1}{2} \times$

$$d^2Pd^{n-2} . QRT\ldots + \frac{n . n-1 . n-2}{2 . 3} . d^3Pd^{n-3} . QRT\ldots$$

$$+ \frac{n . n-1 . n-2 . n-3}{2 . 3 . 4} . d^4Pd^{n-4} . QRT\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + QRT\ldots d^nP.$$

PROBLEMA III.

25. Functionis $X = PQRT\ldots$ Maxima, aut Minima determinare.

SOLUTIO.

Juxta ſuperius demonſtrata, radices aequationis $\frac{dX}{dx}$ $= 0$, hoc eſt

$$\frac{PQR\ldots dT + PQT\ldots dR + PRT\ldots dQ + QRT\ldots dP}{dx}$$

$= 0$ Maxima, aut Minima functionis $PQRT\ldots$ ſuppeditabunt; Maximum quidem, ſi ſecunda fluxio ipſius $PQRT\ldots$ negativa prodierit; Minimum, ſi affirmativa; neutrum, ſi nulla, ſubſiſtente fluxione tertia ipſius $PQRT\ldots$ At ſi una cum fluxione ſecunda haec quoque tertia evaneſcat, ad criterium jam ante traditum ſemper erit confugiendum, eaque regula conſtantiſſime obſervanda. Fluxiones autem cujuſcumque gradus ipſius functionis $PQRT\ldots$ per regulam in Schol. Problematis praecedentis inventam expedite & commode eruentur. Patet ergo propoſitum. *Q. E. I.*

PROBLEMA IV.

26. Functionis $X = P^P$ valores Maximos Minimosve inveſtigare.

SOLUTIO

Maximi, Minimive functionis P^p valores per radices aequationis $\frac{dX}{dx} = 0$, seu $\frac{pP^{p-1}dP}{dx} = 0$ de more determinantur. Hinc divisa aequatione per pP^{p-1}, radices hujus $\frac{dP}{dx} = 0$ Maximos, Minimosve, si modo adsint, functionis P^p valores praebebunt. Ut autem Maxima a Minimis internoscantur, considerare oportebit fluxionem secundam $\frac{ddX}{dx^2}$, seu $\frac{p.p-1.P^{p-2}\,dP^2}{dx^2}$ $+\frac{pP^{p-1}\,ddP}{dx^2}$, in qua evanescente primo termino ob $dP = 0$ solus superest secundus; qui iccirco si substituta radice prodit negativus, Maximam indicat functionem P^p; si oritur affirmativus, indicat Minimam: atque ubi fuerit p numerus impar, seu pP^{p-1} potestas gradus paris, adeoque semper affirmativa, ex solo $\frac{ddP}{dx^2}$ Maximi, Minimique distinctio colligi poterit. At vero nec Maximus erit, nec Minimus functionis valor, si

evanescat terminus $\frac{pP^{p-1}\,ddP}{dx^2}$, permaneatque fluxio tertia $\frac{dddX}{dx^3}$, nimirum

$$\frac{p.p-1.p-2.P^{p-3}dP^3+3p.p-1.P^{p-2}dPddP+pP^{p-1}d^3P}{dx^3},$$

hoc est $\frac{pP^{p-1}\,d^3P}{dx^3}$, evanescente scilicet dP. Hacque porro methodo ut prius (15.) pergendum erit. *Q.E.I.*

SCHOLION.

27. Ex aequatione $\frac{pP^{p-1}\,dP}{dx} = 0$ licet inferre, functionis P^p valorem Minimum per radices aequationis $P = 0$ semper obtineri, si par fuerit numerus p; contra vero nec Maximum, nec Minimum si fuerit impar. Est quippe fluxio p: esima ipsius P^p, ut supputanti innotescet, composita ex termino $\frac{p.p-1.p-2.p-3.p-4\ldots 1dP^p}{dx^p}$, nec non ex aliis ordinatim ductis in P^{p-1}, P^{p-2}, P^{p-3}, P^{p-4}, ... P, qui propterea evanescunt om-

nes praeter primum. Hinc (15.) functio P^p Maxima evadet vel Minima, ſi par fuerit numerus p, ſeu par fluxio ſuperſtes p:eſima functionis P^p: & quoniam termini illius primi $\frac{p.p-1.p-2.p-3\ldots\ldots 1\,dP^p}{dx^p}$, vel etiam $\frac{dP^p}{dx^p}$ valor non poteſt non eſſe affirmativus ob potentiam parem fluxionis dP ſemper affirmativam; fiet iccirco P^p Minimum; at nec Maximum nec Minimum exiſtente p impari.

PROBLEMA V.

28. Invenire Maxima, ac Minima functionis P^pQ^q.

SOLUTIO.

Nihilo aequata de more fluxione $\frac{dX}{dx} = \frac{(qPdQ+pQdP)\ P^{p-1}Q^{q-1}}{dx}$, erit quoque $\frac{qPdQ+pQdP}{dx} = 0$, cujus adeo radices Maximum, Minimumve functioni P^pQ^q valorem inducent; Ma-

ximum quidem, ſi fluxio ſecunda $\frac{ddX}{dx^2}$, quae evaneſcente $\frac{qPdQ+pQdP}{dx}$ reducitur ad $P^{p-1}Q^{q-1}\times$ $\left(\frac{qPddQ+pQddP+(p+q)dPdQ}{dx^2}\right)$, fuerit negativa; Minimum, ſi affirmativa; neutrum, ſi nulla, permanente fluxione tertia $\frac{dddX}{dx^3} = d^3.P^pQ^q =$ &c. Ubi autem p, q ſint numeri impares, & conſequenter P^{p-1}, Q^{q-1} poteſtates pares, valoriſque iccirco affirmativi, ex ſola $\frac{qPddQ+pQddP+(p+q)dPdQ}{dx^2}$ licebit Maximum a Minimo internoſcere. *Q. E. I.*

SCHOLION.

29. Ex formula $\frac{(qPdQ+pQdP)P^{p-1}Q^{q-1}}{dx} = 0$ colligitur tum $P=0$, tum $Q=0$. Jam vero poſita $P=0$, fluxio p:eſima functionis P^pQ^q inito calculo invenitur $\frac{p.p-1.p-2.p-3.p-4\ldots 1\,Q^q dP^p}{dx^p}$, terminis nimirum reliquis ob factores P^p, P^{p-1},

P^{p-2}, P^{p-3}, P^{p-4}, ... P, quos comprehendunt, evaneſcentibus. Itaque (15.) aequationis $P = 0$ radices in functione $P^p Q^q$ ſubrogatae Maximum, Minimumve ſuppeditabunt functionis valorem, ſi numerus p par fuerit; neutrum, ſi impar: & quidem in ipſa hypotheſi p paris habebitur Maximum, ſi Q^q negativa ſit; Minimum, ſi affirmativa, quod ſemper continget ubi par fuerit poteſtas Q^q, ſeu numerus q. Eodem modo aſſumpta $Q = 0$, functionis $P^p Q^q$ fluxio ordinis q:eſimi, quae ſola ſupereſt poſt omnes fluxiones praecedentes nihilo aequales, eſt

$$\frac{q.q-1.q-2.q-3.q-4\ldots\ldots 1\, P^p\, dQ^q}{dx^q},$$ nulleſcentibus ſcilicet fluxionis iſtius terminis caeteris per Q^q, Q^{q-1}, Q^{q-2}, Q^{q-3}, ... Q multiplicatis. Igitur (15.) per radices aequationis $Q = 0$ Maxima, vel Minima functionis $P^p Q^q$ ſemper invenientur ubi fuerit q numerus par; ubi autem ſit impar, nullum habebitur in functione illa Maximum Minimumve: utroque porro q, & p poſito pari, ob valorem fluxionis praecedentis affirmativum Minima orietur functio $P^p Q^q$.

PROBLEMA VI.

30. Functionis $P^p Q^q R^r T^t\ldots$ Maximos, ac Minimos valores inveſtigare.

SOLUTIO.

Facta $\frac{dX}{dx} = 0$, hoc eſt $P^{p-1} Q^{q-1} R^{r-1} T^{t-1}\ldots \times$

$$\left(\frac{tPQR\ldots dT + rPQT\ldots dR + qPRT\ldots dQ + pQRT\ldots dP}{dx}\right)$$

$= 0$, hacque diviſa per $P^{p-1} Q^{q-1} R^{r-1} T^{t-1}\ldots$ obtinentur de more Maxima, ac Minima functionis propoſitae per radices aequationis

$$\frac{tPQR\ldots dT + rPQT\ldots dR + qPRT\ldots dQ + pQRT\ldots dP}{dx}$$

$= 0$: quae ſi dicatur M, ob $\frac{dX}{dx} = P^{p-1} Q^{q-1} R^{r-1} T^{t-1}\ldots M$, erit fluxio ſecunda $\frac{ddX}{dx^2}$ (neglectis terminis per M multiplicatis) aequalis quantitati $\frac{P^{p-1} Q^{q-1} R^{r-1} T^{t-1}\ldots dM}{dx}$, quae facta radicis in locum τοῦ x ſubſtitutione vel negativa prodibit, vel poſitiva, vel nulla: Si primum, functio $P^p Q^q R^r T^t \ldots$ (15.) Maxima orietur; ſi alterum, Minima; ſi tertium (dummodo non evaneſcat ſimul fluxio ſubſequens tertia), nec Maxima erit, nec Minima. Quod ſi tertia quoque fluxio evaneſcat, judicium petendum erit ex quarta, uti ante adnotavimus, &c. $Q. E. I.$

SCHOLION.

31. Ex praecedenti aequatione $\frac{dX}{dx} = 0$, obtinetur

1.° $P = 0$;

2.° $Q = 0$;

3.° $R = 0$;

4.° $T = 0$; &c.

Jam vero in hypotheſi $P = 0$, ſubductis calculis palam fit, fluxionem p:$^{\text{eſimam}}$ functionis $P^p Q^q R^r T^t \ldots$ ſubſtituta radice aequationis $P = 0$ pro x ſuperſtitem fore poſt praecedentes omnes nihilo aequales, eamque ipſam neglectis terminis in P ductis eſſe

$$\frac{p.\,p-1.\,p-2.\,p-3.\,p-4 \ldots\ldots 1\; Q^q R^r T^t \ldots dP^p}{dx^p};$$

ex quo infertur (15.), per ſubſtitutionem radicum aequationis $P = 0$ Maximam, aut Minimam evadere functionem $P^p Q^q R^r T^t \ldots$, ſi fuerit p numerus par; neutram, ſi impar; ac Minimam ſpeciatim, ſi etiam q, r, t, &c. pares fuerint. Rurſus aſſumpta aequatione $Q = 0$, hujuſque radicibus loco τοῦ x ſubſtitutis in fluxionibus functionis praedictae, evaneſcere deprehenduntur fluxiones illae uſque ad fluxionem q:$^{\text{eſimam}}$, quae

invenitur aequalis ipſi $\frac{q.\,q-1.\,q-2.\,q-3.\,q-4 \ldots 1\, P^p R^r T^t \ldots dQ^q}{dx^q}$; quae ſane indicat, exiſtente q impari, functionem $P^p Q^q R^r T^t \ldots$ per ſubſtitutionem radicis erutae ex aequatione $Q = 0$ nec Maximam fieri, nec Minimam; alterutram vero evadere exiſtente q pari, ac ſpeciatim Minimam poſitis quoque reliquis p, r, t, &c. paribus. Ita etiam facta $R = 0$, captiſque fluxionibus memoratae functionis ſucceſſivis, ſubſtitutiſque loco τοῦ x radicibus aequationis $R = 0$, prodit fluxio r:$^{\text{eſima}}$, quae fluxionum non evaneſcentium prima eſt,

$$\frac{r.\,r-1.\,r-2.\,r-3.\,r-4 \ldots\ldots\ldots 1\; P^p Q^q T^t \ldots dR^r}{dx^r}:$$

haec porro functionem $P^p Q^q R^r T^t \ldots$ Maximam aut Minimam arguit poſito r numero pari, ac peculiariter Minimam poſitis etiam p, q, t, &c. paribus; neutram vero facto r impari. Denique eodem modo ſi accipiatur $T = 0$, hujuſque aequationis radices ſubſtituantur in fluxionibus functionis praedictae, fluxio, quae prima ſupereſt praecedentibus aliis evaneſcentibus, eſt ordinis t:$^{\text{eſimi}}$, eaque oritur

$$\frac{t.\,t-1.\,t-2.\,t-3.\,t-4 \ldots\ldots 1\; P^p Q^q R^r \ldots dT^t}{dx^t}.$$

Igitur (15.) & in hoc eventu functio $P^p Q^q R^r T^t \ldots$, Maxima aut Minima evadit per radicis illius substitutionem, si t numerus fuerit par; ac si alii quoque p, q, r, &c. pares fuerint, functio Minima oritur; at neque Maxima fit neque Minima, si t fuerit impar.

PARS II.

De Maximis, ac Minimis Functionum Rationalium Fractarum.

PRÆNOTATIO.

32. SI per P, Q, R, T, &c., nec non F, G, H, L, &c. exprimantur functiones rationales integrae τȣ̃ x, sintque p, q, r, t, &c., nec non f, g, h, l, &c. numeri integri, vel etiam nihilum; Functio nostra X (quam hic rationalem fractam accipimus) ad sex hasce formas revocari percommode poterit;

$$1^\circ \; X = \frac{P}{F};$$

$$2^\circ \; X = \frac{P\,Q}{F\,G};$$

$$3^\circ \; X = \frac{PQRT\ldots}{FGHL\ldots};$$

$$4^\circ \; X = \frac{P^p}{F^f};$$

$$5^\circ \; X = \frac{P^p\,Q^q}{F^f\,G^g};$$

$$6^\circ \; X = \frac{P^p\,Q^q\,R^r\,T^t\ldots}{F^f\,G^g\,H^h\,L^l\ldots}.$$

PROBLEMA I.

33. Maximum, Minimumve Functionis $X = \frac{P}{F}$ valorem determinare.

SOLUTIO.

Eadem, qua supra (15.), ratiocinatione fas cuique est demonstrare, Maxima, ac Minima Functionis $\frac{P}{F}$ elici oportere ex aequatione $\frac{dX}{dx}$, seu $d.\left(\frac{P}{F\,d\,x}\right) = 0$, hoc est $\frac{F\,d\,P - P\,d\,F}{F^2\,d\,x} = 0$. Hinc simplicius orietur $\frac{F\,d\,P - P\,d\,F}{d\,x} = 0$ hujusque aequationis radices loco τȣ̃ x in Functione $\frac{P}{F}$ subrogatae Maximos, Minimosve (si qui fuerint) eidem Functioni valores inducent. Ut autem Maxima a Minimis internoscantur, per ratiocinationem ante institutam (15.) radices aequationis $FdP - PdF = 0$ substituendae sunt pro x in fluxione secunda $\frac{ddX}{dx^2} = dd.\left(\frac{P}{Fdx^2}\right) =$

$$d.\left(\frac{FdP - PdF}{F^2dx^2}\right) = \frac{FddP - PddF}{F^2dx^2}$$

$$-\frac{2dF(FdP - PdF)}{F^3dx^2}$$ = (ob evanescentem magnitudinem $FdP - PdF$) $\frac{FddP - PddF}{F^2dx^2}$; ita quidem ut affirmativus valor fractionis $\frac{FddP - PddF}{F^2dx^2}$, vel solius numeratoris $FddP - PddF$ ex illa substitutione prodiens (neglecto denominatore quadrato F^2 semper affirmativo) indicet Minimum Functionis propositae, valor negativus ipsius $FddP - PddF$ designet Maximum Functionis ejusdem, & valor ipse nullescens [subsistente per eandem substitutionem fluxione tertia $d^3\left(\frac{P}{Fdx^3}\right)$] nec Maximum innuat, nec Minimum. Quod si nullescente fluxione secunda evanescat simul etiam tertia $d^3\left(\frac{P}{Fdx^3}\right) = d^2\left(\frac{FdP-PdF}{F^2dx^3}\right)$

$$= d.\left(\frac{FddP - PddF}{F^2dx^3} - \frac{2dF(FdP - PdF)}{F^3dx^3}\right)$$

= (ob quantitates $FdP - PdF$, & $FddP - PddF$ ex hypothesi nihilo aequales)

$\frac{Fd^3P + dFd^2P - dPd^2F - Pd^3F}{F^2dx^3}$, judicium petendum erit a fluxione quarta $d^4\left(\frac{P}{Fdx^4}\right)$ = (supposita fluxionum praecedentium evanescentia)

$\frac{Fd^4P + 2dFd^3P - 2dPd^3F - Pd^4F}{F^2dx^4}$, quae positiva Minimum, negativa Maximum, nulla (dummodo subsistat fluxio subsequens quinta) neutrum indicabit. At si per substitutionem illam evanescat quinta quoque fluxio $d^5\left(\frac{P}{Fdx^5}\right)$, quae in hypothesi nullescentiae fluxionum antecedentium invenitur

$$= \frac{Fd^5P + 3dFd^4P + 2d^2Fd^3P - 2d^3Fd^2P - 3d^4FdP - Pd^5F}{F^2dx^5};$$

criterium suppeditabit fluxio subsequens sexta $d^6\left(\frac{P}{Fdx^6}\right)$, quae annihilatis antecedentibus prodit

$$=\frac{Fd^6P+4dFd^5P+5d^2Fd^4P-5d^4Fd^2P-4d^5FdP-Pd^6F}{F^2\,dx^6}.$$

Hujus ſcilicet numerator poſitivus Minimum Functionis $\frac{P}{F}$ valorem declarabit, negativus Maximum, nullus (permanente fluxione ſeptima) nec Maximum, nec Minimum ſignificabit. Atque ita porro pergendum erit, prorſus ut ſupra (15.). *Q. E. I.*

S C H O L I O N.

34. Palam eſt paullo attentius rei penetralia rimantibus, fluxionem (n+1): eſimam functionis X, ſeu $\frac{P}{F}$, hoc eſt fluxionem n: eſimam τοῦ $\frac{dX}{dx}$, ſeu ipſius $\frac{FdP-PdF}{F^2\,dx}$, poſito quod fluxiones omnes antecedentes annihilentur, aequalem fore ipſi $\frac{d^n.FdP-d^n.PdF}{F^2\,dx}$.

Porro ad valorem τοῦ $d^n.\,FdP$ obtinendum, inſtituuntur per §. 24. binae ſeries

$$d^{n+1}P,\ d^nP,\ d^{n-1}P,\ d^{n-2}P,\ d^{n-3}P,\ d^{n-4}P,\ \ldots\ldots dP$$

$$F,\quad dF,\quad d^2F,\quad d^3F,\quad d^4F,\quad d^5F,\ \ldots\ldots d^nF,$$

earumque termini eadem loca occupantes ducuntur in ſe invicem, ac productis ſingulis adſcribuntur coefficientes Binomii Newtoniani ad poteſtatem n evecti. Ad habendum pariter valorem τοῦ $d^n.\,PdF$ binae efformantur ſeries

$$d^nP,\ d^{n-1}P,\ d^{n-2}P,\ d^{n-3}P,\ d^{n-4}P,\ d^{n-5}P,\ \ldots\ldots P$$

$$dF,\quad d^2F,\quad d^3F,\quad d^4F,\quad d^5F,\quad d^6F,\ \ldots\ldots d^{n+1}F,$$

ac productis terminorum eadem loca occupantium praefiguntur coefficientes memorati. Eſt itaque $d^n.\,FdP$

$$= Fd^{n+1}P + ndFd^nP + \frac{n.n-1.}{2}d^2F\,d^{n-1}P$$

$$+\frac{n.n-1.n-2.}{2.3}d^3F\,d^{n-2}P + \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{2.3.4}\times$$

$$d^4F\,d^{n-3}P + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.}{2.3.4.5}d^5F\,d^{n-4}P$$

$+$ &c. Rurſus eſt $-\,d^n.\,PdF = -\,dF\,d^nP$

$$-\,nd^2F\,d^{n-1}P - \frac{n.n-1.}{2}d^3F\,d^{n-2}P - \frac{n.n-1\,n-2}{2.3}\times$$

$$d^{n-3}P\,d^4F - \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{2.3.4}\,d^{n-4}P\,d^5F$$

$$-\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{2.3.4.5}.d^{n-5}Pd^6F - \&c.$$

Igitur $d^n F\,dP - d^n P\,dF = F d^{n+1} P \left.\begin{array}{l} +n \\ -1 \end{array}\right\} dF d^n P$

$$+ \left.\begin{array}{c} \frac{n.n-1.}{2} \\ -n \end{array}\right\} d^2 F d^{n-1} P$$

$$+ \left.\begin{array}{c} \frac{n.n-1.n-2.}{2.3} \\ -\frac{n.n-1.}{2} \end{array}\right\} d^3 F d^{n-2} P$$

$$+ \left.\begin{array}{c} \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{2.3.4} \\ -\frac{n.n-1.n-2.}{2.3} \end{array}\right\} d^4 F d^{n-3} P$$

$$+ \left.\begin{array}{c} \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.}{2.3.4.5} \\ -\frac{n.n-1.n-2.n-3.}{2.3.4} \end{array}\right\} d^5 F d^{n-4} P + \&c.$$

Facta porro terminorum reductione orietur

$$\frac{d^n F\,dP - d^n P\,dF}{F^2\,dx^{n+1}} = [F d^{n+1} P + .n-1.dF d^n P$$

$$+ \frac{n.n-3.}{2} d^2 F d^{n-1} P + \frac{n.n-1.n-5.}{2.3} d^3 F d^{n-2} P$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2.n-7.}{2.3.4} d^4 F d^{n-3} P$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-9.}{2.3.4.5} d^5 F d^{n-4} P$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-11.}{2.3.4.5.6} d^6 F d^{n-5} P$$

$$+ \&c.] : F^2\,dx^{n+1} = \frac{d^{n+1} X}{dx^{n+1}} = d^{n+1} . \frac{P}{F\,dx^{n+1}},$$

posito tamen quod fluxiones omnes praecedentes evanescant. Seriem hanc terminorum satis concinnam & elegantem vocabimus W; ex eaque (nulla habita ratione denominatoris F^2 semper affirmativi) petendum erit criterium Maximorum, Minimorumque functionis propositae $\frac{P}{F}$. Haec nempe regula tenenda est: Ponatur in formula W, $n = 0$, & quantitas $FdP - dFd^0P$, seu $\frac{F\,dP - P\,dF}{dx}$, in quam formula abit, fiet nihilo aequalis; hujusque quantitatis inveniantur radices; seu valores τοῦ x: Tum substituantur valores isti pro x in formula W facto $n = 1$; ac si evanescat per substitutionem formula ipsa, subrogentur iidem valores in W facto $n = 2$; sique iterum nullescat W, fiat eadem substitutio in W, sumpto $n = 3$; ac si rursus oriatur W nihilo aequalis, substitutio eadem fiat in W, posito $n = 4$; sicque perpetuo donec ea occurrat formulae

W quantitas, quae minime evanescat. Jam vero si quantitati W non evanescenti respondeat numerus $n+1$ impar, seu n par, caret functio $\frac{P}{F}$ Maximis, Minimisve valoribus; si autem ipsi W non evanescenti respondere deprehendatur numerus $n+1$ par, sive n impar, in Functione $\frac{P}{F}$ datur Maximum aliquod, Minimumve, primum videlicet quoties τꙋ W valor oriatur negativus, alterum ubi ejusdem W prodeat valor affirmativus.

PROBLEMA II.

35. Invenire Maxima, ac Minima functionis $\frac{PQ}{FG}$.

SOLUTIO.

Ex aequatione $\frac{dX}{dx} = \frac{FG(PdQ+QdP)-PQ(FdG+GdF)}{F^2\,G^2}$ $=0$, sive ex solo numeratore $=0$ eliciantur valores τꙋ x, qui in functione $\frac{PQ}{FG}$ subrogati Maximum, Minimumve (si ullus erit) eidem functioni valorem inducent. Ut Maxima a Minimis discernantur, accipienda est fluxio secunda $\frac{ddX}{dx^2}$, quae (in hypothesi fluxionis primae nullescentis) prodit

$$=\frac{FG(PddQ+2dPdQ+QddP)-PQ(FddG+2dFdG+GddF)}{F^2\,G^2}$$

In hac, seu potius in ejus numeratore (ob denominatorem semper affirmativum) subrogatus valor ipsius x quantitatem exhibebit vel affirmativam, vel negativam, vel nullam; & in primo eventu functionem $\frac{PQ}{FG}$ Minimam, in altero Maximam, in postremo neutram (permanente tamen fluxione tertia) indicabit. Evanescente autem & tertia functionis datae fluxione, confugiendum est ad quartam; sicque porro pergendum, ut ante. *Q. E. I.*

SCHOLION.

36. Attendenti perspectum est, fluxionem $(n+1)$:esimam τꙋ $\frac{PQ}{FG}$, seu n:esimam ipsius $d.\frac{PQ}{FG}$ (posito quod fluxiones omnes antecedentes evanescant) esse (24.)

$$\frac{d^{n}[FG(PdQ+QdP)]-d^{n}[PQ(FdG+GdF)]}{F^2\ G^2}$$

$$=[FG\,d^{n}(PdQ+QdP)+nd.FG\,d^{n-1}(PdQ+QdP)$$

$$+\frac{n.n-1.}{2}d^2 FG\,d^{n-2}(PdQ+QdP)+\frac{n.n-1.n-2.}{2.3}\times$$

$$d^3\,FG\,d^{n-3}(PdQ+QdP)+\frac{n.n-1.n-2.n-3.}{2.3.4}$$

$$d^4\,FG\,d^{n-4}(PdQ+QdP)+\&c.\ldots\ldots\ldots-PQ\times$$

$$d^{n}(FdG+GdF)-nd.PQd^{n-1}(FdG+GdF)-\frac{n.n-1.}{2}\times$$

$$d^2 PQd^{n-2}(FdG+GdF)-\frac{n.n-1.n-2.}{2.3}\ d^3\ \ PQ\times$$

$$d^{n-3}(FdG+GdF)-\frac{n.n-1.n-2.n-3.}{2.3.4}d^4 PQ\times$$

$d^{n-4}(FdG+GdF)-\&c.\ldots\ldots]:F^2 G^2=$ (vocando A hujus quantitatis numeratorem) $\frac{A}{F^2\ G^2}$. Porro in magnitudine A fluxiones quaelibet ipſius FG expeditiſſime habentur per num. 24.; fluxiones autem n:$^{\text{eſimae}}$, (n—1):$^{\text{eſimae}}$, (n—2):$^{\text{eſimae}}$, (n—3):$^{\text{eſimae}}$ r8

$(PdQ+QdP)$ſequenti modo per ſeriem elegantiſſimam determinantur: Eſt $d^{n}(PdQ+QdP=d^{n}PdQ=d^{n}QdP$

$$=(34.)\ Pd^{n+1}Q+ndPd^{n}Q+\frac{n.-1.}{2}d^2Pd^{n-1}Q$$

$$+\frac{n.n-1.n-2.}{2.3}d^3.Pd^{n-2}Q+\frac{n.n-1.n-2.n-3.}{2.3.4}\times$$

$$d^4Pd^{n-3}Q+\&c.\ldots\ldots+dPd^{n}Q+nd^2Pd^{n-1}Q$$

$$+\frac{n.n-1.}{2}d^3Pd^{n-2}Q+\frac{n.n-1.n-2.}{2.3}d^4Pd^{n-3}Q$$

$$+\frac{n.n-1.n-2.n-3.}{2.3.4}d^5Pd^{n-4}Q+\&c.\ldots\ldots$$

$$=Pd^{n+1}Q+\left.\begin{matrix}n\\+1\end{matrix}\right\}dPd^{n}Q$$

$$+\left.\begin{matrix}\frac{n.n-1.}{2}\\+n\end{matrix}\right\}d^2Pd^{n-1}Q$$

$$+\left.\begin{matrix}\frac{n.n-1.n-2.}{2.3}\\+\frac{n.n-1.}{2}\end{matrix}\right\}d^3Pd^{n-2}Q$$

$$+\left.\begin{matrix}\frac{n.n-1.n-2.n-3.}{2.3.4}\\+\frac{n.n-1.n-2.}{2.3}\end{matrix}\right\}d^4Pd^{n-3}Q$$

$$+ \&c. \ldots = P\,d^{n+1} Q + . n+1 . dP\,d^{n} Q + . \frac{n+1.n}{2} \times d^2 P\,d^{n-1} Q + . \frac{n+1.n.n-1.}{2.3} d^3 P\,d^{n-2} Q$$

$$+ . \frac{n+1.n.n-1.n-2.}{2.3.4} d^4 P\,d^{n-3} Q$$

$$+ . \frac{n+1.n.n-1.n-2.n-3.}{2.3.4.5} d^5 P\,d^{n-4} Q$$

+ &c. .... Quae ſane quantitas praebet etiam, ut liquet, fluxiones reliquas $(n-1)$:eſimam, $(n-2)$:eſimam, $(n-3)$:eſimam, &c. ipſius $(PdQ + QdP)$. Per ſeriem omnino ſimilem inveniuntur fluxiones quantitatis $FdG + GdF$, ex quibus A coaleſcit. Jam vero ad Maxima, ac Minima functionis $\frac{PQ}{FG}$ determinanda, valores τȣ̃ x ex aequatione $FG\,(PdQ + QdP) - PQ \times (FdG + GdF) = 0$ erutos ſubrogare oportebit loco ipſius x in formula A, ponendo ſucceſſive pro n numeros 1, 2, 3, 4, 5, &c., donec prodeat A non jam nihilo aequalis (quod perraro accidet), ſed affirmativa, vel negativa. Si itaque A tunc incipiat non evaneſcere, cum pro n ponitur numerus par; valor τȣ̃ x

in functione $\frac{PQ}{FG}$ ſubſtitutus nullum praebet Maximum Minimumve: Si A incipiat non evaneſcere quando n capitur impar, radix x Maximum dat, Minimumve, primum prodeunte A negativo, alterum exiſtente A affirmativo; omnino ut ſupra num. 34.

PROBLEMA III.

37. Maximos, Minimoſque functionis $\frac{PQRT\ldots}{FGHL\ldots}$ valores invenire.

SOLUTIO.

Eſt $\frac{dX}{dx} = [FGHL\ldots(PQR\ldots dT + PQT\ldots \times dR + PRT\ldots dQ + QRT\ldots dP) - PQRT\ldots \times (FGH\ldots dL + FGL\ldots dH + FHL\ldots dG + GHL\ldots dF)] : F^2 G^2 H^2 L^2 \ldots = 0$ (15.), ſeu ſolus numerator $= 0$. Hujus numeratoris, quem dico N, radices loco τȣ̃ x ſubſtitutae in functione $\frac{PQRT\ldots}{FGHL\ldots}$ eam reddunt Maximam Minimamve, Maximam quidem, ſi per eandem ſubſtitutionem oriatur dN negativus; Minimam, ſi affirmativus; neutram, ſi dN fiat nullus ſubſiſtente tamen ddN. Evanefcente autem & ddN, regulae ante allatae femper eft inhaerendum &c. *Q.E.I.*

SCHOLION.

38. Evidens eft, fluxionem $(n+1)$: efimam τῦ $\frac{PQRT\ldots}{FGHL\ldots}$, pofito quod fluxiones ipfius praecedentes evanefcant, fieri $= \frac{dN^n}{F^2 G^2 H^2 L^2 \ldots}$. Facile porro eft per num. 24. feriem determinare aequalem ipfi dN^n; ita ut ad Maxima, ac Minima propofitae functionis internofcenda fubftituendi fint in formula dN^n (denominatore $F^2 G^2 H^2 L^2 \ldots$ femper affirmativo prorfus neglecto) valores τῦ x ex aequatione $dX = 0$ eliciti ponendo fucceffive numeros 1, 2, 3, 4, 5, &c. in locum ipfius n quoadufque oriatur valor τῦ dN^n affirmativus, vel negativus. Si enim valor dN^n affirmativus aut negativus evadat quando n accipitur par, inita fubftitutio nullum propofitae Functionis Maximum Minimumve indicabit; fi id contingat quando n fumitur impar, habebit data Functio Maximum aliquod, aut Minimum, primum in eventu valoris dN^n negativi, fecundum in hypothefi valoris ejufdem affirmativi.

PROBLEMA IV.

39. Functionis $X = \frac{P^p}{F^f}$ Maxima, ac Minima invenire.

SOLUTIO.

Fit de more $dX = 0 = \frac{pF^fP^{p-1}dP - fP^pF^{f-1}dF}{F^{2f}}$ $= \frac{P^{p-1}(pFdP - fPdF)}{F^{f+1}}$; unde infertur $pFdP - fPdF = 0$; hujufque aequationis radices, feu valores τῦ x in data functione $\frac{P^p}{F^f}$ pro x fubftituti functionem ipfam Maximam, vel Minimam, vel neutram efficient, prouti fluxionis fecundae ddX valor ex eadem fubftitutione ortus negativus erit, vel pofitivus, vel (permanente fluxione tertia) nullus. Fluxio autem ifthaec fecunda (fuppofita evanefcentia fluxionis primae) invenitur $= \frac{P^{p-1}(pFddP + (p-f)dPdF - fPddF)}{F^{f+1}}$.

Ergo &c. *Q. E. I.*

SCHOLION I.

40. Facile captu eſt, fluxionem $(n+1)$:$^{\text{eſimam}}$ functionis $\frac{P^p}{F^f}$, hoc eſt n:$^{\text{eſimam}}$ formulae

$$\frac{P^{p-1}(pFdP - fPdF)}{F^{f+1}},$$ poſito quod fluxiones reliquae antecedentes nihilo aequentur, fore

$$\frac{P^{p-1}(p\,d^n FdP - f\,d^n PdF)}{F^{f+1}} = (34.)\ \frac{P^{p-1}}{F^{f+1}} \times$$

$$[\,pFd^{n+1}P + \left.\begin{matrix} np \\ -f \end{matrix}\right\}dF d^n P$$

$$+ \left.\begin{matrix} \frac{n.np-p.}{2} \\ -nf \end{matrix}\right\} d^2Fd^{n-1}P$$

$$+ \left.\begin{matrix} \frac{n.n-1.np-2p.}{2.3} \\ -\frac{n.nf-f.}{2} \end{matrix}\right\} d^3Fd^{n-2}P$$

$$+ \left.\begin{matrix} \frac{n.n-1.n-2.np-3p.}{2.3.4} \\ -\frac{n.n-1.nf-2f.}{2.3} \end{matrix}\right\} d^4Fd^{n-3}P$$

$$+ \left.\begin{matrix} \frac{n.n-1.n-2.n-3.np-4p.}{2.3.4.5} \\ -\frac{n.n-1.n-2.nf-3f.}{2.3.4} \end{matrix}\right\} d^5Fd^{n-4}P + \&c.\ldots]$$

$$= \frac{P^{p-1}}{F^{f+1}}\,[\,pFd^{n+1}P + .np - f.\,dFd^nP$$

$$+ \frac{n.np-p-2f.}{2}d^2Fd^{n-1}P + \frac{n.n-1.np-2p-3f.}{2.3}d^3Fd^{n-2}P$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2.np-3p-4f.}{2.3.4}d^4Fd^{n-3}P$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2.n-3.np-4p-5f.}{2.3.4.5}d^5Fd^{n-4}P + \&c.\ldots]$$

$= \frac{P^{p-1}}{F^{f+1}}.\,M$, nuncupato M factore altero. Hinc itaque, ut Maxima a Minimis internoſcantur, ſubſtituendi erunt valores τȣ̃ x in formula $\frac{P^{p-1}}{F^{f+1}}.M$ ponendo ſingulis vicibus pro n numeros 1, 2, 3, 4, 5, &c. uſque dum ipſius formulae valor incipiat non evaneſcere; quod quidem ſi accidat ubi pro n ſumitur numerus par, indicium eſt, nullum ex dati valoris x ſubſtitutione oriri in propoſita functione $\frac{P^p}{F^f}$ Maximum, Minimumve; ſi contra id contingat ubi n ſumitur impar, habebit praedicta functio Maximum aliquod, Minimumve, Maximum prodeunte $\frac{P^{p-1}}{F^{f+1}}$. M negativo, Minimum eo prodeunte affirmativo.

SCHOLION II.

41. Ex aequatione $\frac{P^{p-1}(pFdP - fPdF)}{F^{f+1}} = 0$ colligere licet $P = 0$, cujus proinde radices, seu valores τȣ x in functione $\frac{P^p}{F^f}$ subrogati Maxima, & Minima (si quae fuerint) suppeditabunt. Ad haec autem distinguenda, operae pretium est animadvertere, fluxiones omnes ipsius $\frac{P^p}{F^f}$, quae fluxionem p:esimam antecedunt, in hypothesi $P = 0$ fieri nihilo aequales, fluxionemque p:esimam superstitem esse

$$= \frac{p.\,p-1.\,p-2.\,p-3.\,p-4.\,p-5\,\ldots\ldots\,1\,dP^p}{F^f};$$

quae sane, si p fuerit numerus impar, nullum propositae functionis indicabit Maximum Minimumve; si p fuerit par, Maximum arguet, aut Minimum pro valore negativo, aut affirmativo fluxionis ejusdem; Minimumque

semper designabitur, si uterque p, & f par fuerit, ob valorem fluxionis tunc necessario affirmativum.

PROBLEMA V.

42. Functionis $\frac{P^p Q^q}{F^f G^g}$ valores Maximos Minimosque determinare.

SOLUTIO

Ex aequatione $dX =$

$$\frac{P^{p-1}Q^{q-1}(pFGQdP + qFGPdQ - fPQGdF - gPQFdG)}{F^{f+1}\ G^{g+1}}$$

$= 0$ educantur valores τȣ x; iique in functione $\frac{P^p Q^q}{F^f G^g}$ loco ipsius x substituti Maximam illam efficient, si fluxio secunda $d^2 \frac{P^p Q^q}{F^f G^g}$ ex eadem substitutione deprehendatur negativa; Minimam, si fluxio isthaec oriatur affirmativa; neutram, si fluxio nullescat, subsistente fluxione tertia; &c. ut supra. *Q. E. I.*

SCHOLION I.

43. Fluxio(n+1):esima functionis $\frac{P^p Q^q}{F^f G^g}$, seu fluxio n:esima formulae

$$\frac{P^{p-1}\,Q^{q-1}\,(pFGQdP+qFGPdQ-fPQGdF-gPQFdG)}{F^{f+1}\,G^{g+1}}$$

$$=\frac{P^{p-1}\,Q^{q-1}\,[QG(pFdP-fPdF)+PF(qGdQ-gQdG)]}{F^{f+1}\,G^{g+1}},$$

posito quod fluxiones omnes antecedentes evanescant, invenitur $=\frac{P^{p-1}\,Q^{q-1}}{F^{f+1}\,G^{g+1}}\,[\,QG\,d^{n}\!:(pFdP-fPdF)$ $+\,nd.\,QG\,d^{n-1}\!:(pFdP-fPdF)+\frac{n\,.\,n-1\,.}{2}\times$ $d^{2}\!:QG\,d^{n-2}\!:(pFdP-fPdF)+\frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2\,.}{2\,.\,3}\times$ $d^{3}\!:QG\,d^{n-3}\!:(pFdP-fPdF)+$ &c.... $+\,PF\times$ $d^{n}\!:(qGdQ-gQdG)+nd.\,PF\,d^{n-1}\!:(qGdQ-gQdG)$ $+\,\frac{n\,.\,n-1\,.}{2}\,d^{2}\!:PF\,d^{n-2}\!:(qGdQ-gQdG)$ $+\,\frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2\,.}{2\,.\,3}\,d^{3}\!:PF\,d^{n-3}\!:(qGdQ-gQdG)$ $+$ &c.... $]=\frac{P^{p-1}\,Q^{q-1}}{F^{f+1}\,G^{g+1}}\,.\,S$, denominato S factorum altero. Per series autem num. 24., & 40. inveniuntur fluxiones, quae in factore S continentur.

Ponendo igitur successive in S loco ipsius n numeros 1, 2, 3, 4, 5, &c. quoadusque formula $\frac{P^{p-1}\,Q^{q-1}}{F^{f+1}\,G^{g+1}}\,.\,S$ affirmativa fiat, vel negativa, seu donec incipiat non evanescere, licebit, ut ante, Maxima a Minimis internoscere. Si enim praedictae formulae non evanescenti, & affirmativae respondeat numerus n impar, proposita functio $\frac{P^{p}\,Q^{q}}{F^{f}\,G^{g}}$ Minimum habebit; Maximum, si n imparem formula sequatur negativa; neutrum, si formula oriatur non evanescens quando n par accipitur. Evidens autem est, positis p, q, f, g, imparibus, criterium hujusmodi ex S tantummodo peti posse, ob valorem tunc affirmativum factoris alterius.

SCHOLION II.

44. Æquatio

$$\frac{P^{p-1}\,Q^{q-1}\,(pFGQdP+qFGPdQ-fPQGdF-gPQFdG)}{F^{f+1}\,G^{g+1}}$$

$=0$ suppeditat tum $P=0$, tum $Q=0$. Sumpto autem $P=0$, fluxio p:$^{\text{esima}}$ functionis $\frac{P^{p}\,Q^{q}}{F^{f}\,G^{g}}$ (ob fluxiones omnes praecedentes in hac hypotheſi evidenter nihilo aequales) inito calculo invenitur $= \frac{Q^q}{F^f G^g} \times$ $(p . p - 1 . p - 2 . p - 3 . p - 4 . p - 5 \ldots 1 \, dP^p)$. Igitur per ſuperius demonſtrata, radix aequationis $P = 0$ in functione $\frac{P^p Q^q}{F^f G}$ ſubſtituta Maximum, vel Minimum valorem eidem impertiet quotieſcumque p fuerit par, Maximum videlicet, ſi fluxio illa $p:^{\text{eſima}}$ ex praedictae radicis ſubſtitutione valorem nanciſcatur negativum ; Minimum, ſi fluxio ipſa valorem acquirat affirmativum : at nec Maximum, nec Minimum valorem impertiet quoties p fuerit numerus impar. Haud ſecus, accepto $Q = 0$, deducitur fluxio $q:^{\text{eſima}}$ functionis propoſitae, nimirum fluxio poſt praecedentes omnes evaneſcentes prima ſuperſtes $= \frac{P^p}{F^f G^g}(q . q - 1 . q - 2 . \times$ $q - 3 . q - 4 . q - 5 \ldots\ldots 1 \, dQ^q)$. Itaque functio $\frac{P^p Q^q}{F^f G^g}$ Maxima evadet, aut Minima ex ſubſtitutione radicis aequationis $Q = 0$ in locum τοῦ x, ſiquidem q fuerit numerus par, Maxima ſcilicet ubi fluxionis illius $q:^{\text{eſimae}}$ valor ex eadem ſubſtitutione prodeat negativus ; Minima, ubi oriatur affirmativus : neutra vero quotieſcumque impar fuerit exponens q. Ergo in univerſum, radices aequationum $P = 0$, $Q = 0$ Maxima, aut Minima ſuppeditabunt, ſi p, q, pares fuerint ; neutrum, ſi impares ; poſitiſque paribus non modo p, q, ſed etiam f, g, Minima tantum invenientur, ob valorem nempe fluxionum $p:^{\text{eſimae}}$, $q:^{\text{eſimae}}$ tunc neceſſario affirmativum.

PROBLEMA VI.

45. Functionis $X = \frac{P^p Q^q R^r T^t \ldots}{F^f G^g H^h L^l \ldots}$ Maxima, ac Minima determinare.

SOLUTIO.

Ex aequatione $dX = [F^f G^g H^h L^l \ldots (t P^p Q^q \times R^r T^{t-1} \ldots dT + r P^p Q^q T^t R^{r-1} \ldots dR + q P^p R^r T^t Q^{q-1} \ldots dQ + p Q^q R^r T^t P^{p-1} \ldots dP) - P^p \times Q^q R^r T^t \ldots (l F^f G^g H^h L^{l-1} \ldots dL + h F^f G^g \times L^l H^{h-1} \ldots dH + g F^f H^h L^l G^{g-1} \ldots dG + f G^g \times H^h L^l F^{f-1} \ldots dF)] : F^{2f} G^{2g} H^{2h} L^{2l} \ldots = P^{p-1} \times Q^{q-1} R^{r-1} T^{t-1} \ldots [PQRFGH \ldots (tLdT - lTdL)$

$+ PQTFGL\ldots(rHdR - hRdH) + PRTFHL\ldots\times$
$(qGdQ - gQdG) + QRTGHL\ldots(pFdP - fPdF)]:$
$F^{f+1}\, G^{g+1}\, H^{h+1}\, L^{l+1}\ldots = o$ eliciantur valores τῦ x; iique in functione X substituti valorem ipsius Maximum, Minimum, vel neutrum exhibebunt prouti secundae fluxionis ddX valor ex eadem substitutione proveniens negativus fuerit, affirmativus, vel permanente fluxione tertia nullus. Si & tertia evanuerit, pergendum ad quartam, &c. ut supra. *Q. E. I.*

Scholion I.

46. Attendenti perspectum est, fluxionem $(n+1)$: esimam functionis X, seu n: esimam ipsius dX (supposita fluxionum antecedentium evanescentia) fore $\frac{P^{p-1}\, Q^{q-1}\, R^{r-1}\, T^{t-1}\ldots}{F^{f+1}\, G^{g+1}\, H^{h+1}\, L^{l+1}\ldots}$ $[PQRFGH\ldots\times$

$$d^n(tLdT - lTdL) + n\, d.\, PQRFGH\ldots d^{n-1}(tLdT - lTdL) + \frac{n.\, n-1.}{2} d^2\, PQRFGH\ldots d^{n-2}(tLdT - lTdL) + \frac{n.\, n-1.\, n-2.}{2.\, 3} d^3\, PQRFGH\ldots\times$$

$$d^{n-3}(tLdT - lTdL) + \&c.\ldots + PQTFGL\ldots\times$$
$$d^n(rHdR - hRdH) + n\, d.\, PQTFGL\ldots d^{n-1}(rHdR - hRdH) + \frac{n.\, n-1.}{2} d^2\, PQTFGL\ldots d^{n-2}(rHdR - hRdH) + \frac{n.\, n-1.\, n-2.}{2.\, 3} d^3\, PQRFGH\ldots\times$$
$$d^{n-3}(rHdR - hRdH) + \&c.\ldots + PRTFHL\ldots\times$$
$$d^n(qGdQ - gQdG) + n\, d.\, PRTFHL\ldots d^{n-1}(qGdQ - gQdG) + \frac{n.\, n-1.}{2} d^2\, PRTFHL\ldots d^{n-2}(qGdQ - gQdG) + \frac{n.\, n-1.\, n-2.}{2.\, 3} d^3\, PRTFHL\ldots\times$$
$$d^{n-3}(qGdQ - gQdG) + \&c.\ldots + QRTGHL\ldots\times$$
$$d^n(pFdP - fPdF) + n\, d.\, QRTGHL\ldots d^{n-1}(pFdP - fPdF) + \frac{n.\, n-1.}{2} d^2\, QRTGHL\ldots d^{n-2}(pFdP - fPdF) + \frac{n.\, n-1.\, n-2.}{2.\, 3} d^3.\, QRTGHL\ldots\times$$

$d^{n-3}(pFdP - fPdF) + \&c.\ldots]$. In hac formula, cujus termini fluxionarii per num. 24., & 48. inveniuntur, facta ſubſtitutione valoris x, poſitiſque ſucceſſive numeris $1, 2, 3, 4, 5$, &c. pro n, vel ea incipit non evaneſcere quando n accipitur par, vel cum n ſumitur impar. In primo eventu functio X ex ſubſtitutione dati valoris x nullum acquirit valorem Maximum, Minimumve; in altero eventu functio ipſa Minima evadit, ſi formula fuerit affirmativa; & functio oritur Maxima, ſi formula prodeat negativa. Si exponentes $p, q, r, t\ldots, f, g, h, l\ldots$ impares ſupponantur, tunc quidem ob valorem factoris $\frac{P^{p-1}\,Q^{q-1}\,R^{r-1}\,T^{t-1}\ldots}{F^{f+1}\,G^{g+1}\,H^{h+1}\,T^{t+1}\ldots}$ affirmativum, ex altero formulae factore judicium petere ſufficiet.

SCHOLION II.

47. Ex aequatione $dX = 0$ palam eſt obtineri

1.° $P = 0$;

2.° $Q = 0$;

3.° $R = 0$;

4.° $T = 0$.

Jam vero aſſumpto $P = 0$, fluxio p: eſima functionis propoſitae invenitur $\frac{Q^q\,R^r\,T^t\ldots}{F^f\,G^g\,H^h\,L^l\ldots}(p.p-1.p-2.\times$

$p-3.p-4.p-5\ldots 1\,dP^p)$; reliquae omnes antecedentes evaneſcunt. Pariter accepto $Q = 0$, fluxio q: eſima ipſius X non evaneſcens praebet $\frac{P^p\,R^r\,T^t\ldots}{F^f\,G^g\,H^h\,L^l\ldots}\times$ $(q.q-1.q-2.q-3.q-4.q-5\ldots 1\,dQ^q)$. Rurſus poſito $R = 0$, fluxio ipſius X r: eſima, quae (reliquis evaneſcentibus) incipit non evaneſcere, oritur $\frac{P^p\,Q^q\,T^t\ldots}{F^f\,G^g\,H^h\,L^l\ldots}(r.r-1.r-2.r-3.r-4.r-5\ldots 1\,dR^r)$.

Denique facto $T = 0$ fluxio t: eſima ipſius X invenitur $= \frac{P^p\,Q^q\,R^r\ldots}{F^f\,G^g\,H^h\,L^l\ldots}(t.t-1.t-2.t-3.t-4.\times$ $t-5\ldots 1\,dT^t)$. Ex his porro manifeſtum eſt, radices aequationum $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $T = 0$ in functione X ſubſtitutas Maxima, aut Minima ſuppeditare, quotieſcumque exponentes p, q, r, t numeros pares exhibuerint, & Maxima quidem, ſi fluxionum praedictarum valores per eandem ſubſtitutionem negativi prodierint; Minima, ſi affirmativi; ubi autem exponentes ipſi impares fuerint, nec Maxima, nec Minima ex radicum illarum ſubſtitutione obtineri; denique

Minimum aliquod ſemper oriri, ubi exponentes omnes p, q, r, t...., f, g, h, l... pares extiterint, ob valorem nimirum fluxionum $p{:}^{\text{eſimae}}$, $q{:}^{\text{eſimae}}$, &c. tunc neceſſario affirmativum.

DISQUISITIO XII.

DE ÆQUATIONIBUS INDEFINITIS, DEQUE METHODO INDETERMINATARUM.

1. IN aequationum indefinitarum indole ac natura expendenda, earumque radicibus indagandis peculiaria quandoque ſe offerunt artificia, quae Geometrae regulis generalibus ad id praeſtandum idoneis deſtituto mirifice opitulantur, eumque practer ſpem ad propoſitam ſibi metam perducunt.

2. Inquirebam nuper in indolem indefinitae aequationis terminorum numero utcumque magno conflatae (A) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \ldots\ldots + x^n = 0$. Quum autem notas omnes regulas fruſtra tentaſſem, ſuccurrit tandem mihi, aequationem ipſam converti poſſe in hanc ſimpliciſſimam $x^{n+1} - 1 = 0$. Nam aequationis (A) termini ſunt continue proportionales, ut patet, eorumque ſumma ex Progreſſionum Doctrina obtinetur ſi ex facto termini poſtremi x^n in ſecundum x aufertur termini primi 1 quadratum, & reſiduum dividitur per primi & ſecundi termini differentiam;

ex quo oritur $1 + x + x^2 + x^3 \ldots\ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = 0$; ac proinde (B) $x^{n+1} - 1 = 0$.

3. Id ipſum nanciſcor alia via: divido ſcilicet terminos omnes aequationis (A) per x^n, habeoque $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \ldots\ldots + \frac{1}{x^n} = 0$. Modo animadverto formulam $\frac{1}{x-1}$ eſſe $= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \ldots + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^n(x-1)} = \frac{1}{x^n(x-1)} + (A) - 1$.

Quum autem ſit $(A) = 0$; oritur $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x^n(x-1)} - 1$, ac denique (B) $x^{n+1} - 1 = 0$, uti prius.

4. Conſidero aequationes duas

(A) $1 + x + x^2 + x^3 \ldots\ldots + x^n = 0$

(B) $x^{n+1} - 1 = 0$,

quarum haec deducta eſt ab illa, & quae iccirco praeter radicem unicam $x = 1$, alias radices omnes communes habet cum aequatione (A). Notum porro eſt, in hypotheſi n imparis, ſive $n + 1$ paris radicem alteram aequationis (B) eſſe -1: proindeque in hac

ipſa hypotheſi etiam aequatio (A) radicem realem habebit -1, quod ſane manifeſtum fit quia ſingula terminorum paria evaneſcunt, & abeunt in $+1 - 1$.

5. Conſtat praeterea binomiae aequationis (B) radices reliquas omnes imaginarias eſſe, eaſque exprimi generaliter per $x = \cos.\frac{2h}{n+1}\pi \pm \sqrt{\left(\cos.^2\frac{2h}{n+1}\pi - 1\right)}$, denotante π ſemicircumferentiam circuli, cujus radius $= 1$, & $2h$ numeros omnes pares non majores quam $n+1$. Igitur aequationis propoſitae $1 + x + x^2 + x^3 \ldots + x^n = 0$, exiſtente n numero impari, una tantum erit radix realis, caeteraeque imaginariae; nimirum

$$x = -1$$

$$x = \cos.\frac{2}{n+1}\pi + \sqrt{\left(\cos.^2\frac{2}{n+1}\pi - 1\right)}$$

$$x = \cos.\frac{2}{n+1}\pi - \sqrt{\left(\cos.^2\frac{2}{n+1}\pi - 1\right)}$$

$$x = \cos.\frac{4}{n+1}\pi + \sqrt{\left(\cos.^2\frac{4}{n+1}\pi - 1\right)}$$

$$x = \cos.\frac{4}{n+1}\pi - \sqrt{\left(\cos.^2\frac{4}{n+1}\pi - 1\right)}$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$x = \cos.\frac{n-1}{n+1}\pi + \surd\left(\cos.^2\frac{n-1}{n+1}\pi - 1\right)$$

$$x = \cos.\frac{n-1}{n+1}\pi - \surd\left(\cos.^2\frac{n-1}{n+1}\pi - 1\right):$$

ſuppoſito autem n pari, radices omnes imaginariae ſunt, videlicet ſequentes

$$x = \cos.\frac{2}{n+1}\pi + \surd\left(\cos.^2\frac{2}{n+1}\pi - 1\right)$$

$$x = \cos.\frac{2}{n+1}\pi - \surd\left(\cos.^2\frac{2}{n+1}\pi - 1\right)$$

$$x = \cos.\frac{4}{n+1}\pi + \surd\left(\cos.^2\frac{4}{n+1}\pi - 1\right)$$

$$x = \cos.\frac{4}{n+1}\pi - \surd\left(\cos.^2\frac{4}{n+1}\pi - 1\right)$$

. . . .
. . . .
. . . .

$$x = \cos.\frac{n}{n+1}\pi + \surd\left(\cos.^2\frac{n}{n+1}\pi - 1\right)$$

$$x = \cos.\frac{n}{n+1}\pi - \surd\left(\cos.^2\frac{n}{n+1}\pi - 1\right)$$

6 Pari ratiocinandi modo demonſtrari breviſſime

poteſt Theorema, quod in Algebrae Elementis (*a*) oſtendit EULERUS methodo a Dan. BERNOULLIO propoſita in Actis veteribus Petropolitanae Academiae tom. III., nimirum aequationis infinitae (*C*) $x^{\infty} - x^{\infty-1} - x^{\infty-2}$ ..... $- x^2 - x - 1 = 0$ radicem unam realem eſſe numerum binarium. Nam ex Progreſſionum doctrina ſumma terminorum omnium hujus aequationis praeter primum eſt $\frac{1-x^{\infty}}{x-1}$; propterea aequatio (*C*) degenerat in $x^{\infty} + \frac{1-x^{\infty}}{x-1} = 0$, ſeu, in $x^{\infty+1} - 2x^{\infty} + 1 = 0$, ſeu (facta diviſione per x^{∞}) in $x - 2 + \frac{1}{x^{\infty}} = 0$, cui poſtremae aequationi evidenter ſatisfacit poſitio $x = 2$. Idem oſtendi poteſt diviſa aequatione (*C*) per x^{∞}, ex quo producitur

$$1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \ldots\ldots\ldots - \frac{1}{x^{\infty}} = 0:$$

conſtat autem ex Theoria Progreſſionum, aſſumpto

(*a*) Vid. Leonhard EULER *Vollſtändige Anleitung zur Algebra.* Zweyt. Theil, Erſt. Abſchn. Cap. 16. §. 239. Vid. etiam verſionem gallicam Jo. BERNOULLII tom. 1. §. 800.

$x=2$ terminos post primum omnes $-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$ $-\frac{1}{x^3}\ldots\ldots-\frac{1}{x^{\infty}}$ evadere $=-1$, & consequenter aequationi fieri satis.

7. Perpendo nunc aequationem (D) $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5\ldots\ldots+(n+1)x=0$, videoque oriri ipsam ex divisione unitatis per binomium quadratum $(1-x)^2$, ita ut sit $\frac{1}{(1-x)^2}$ $=1+2x+3x^2+4x^3\ldots\ldots+(n+1)x^n$ $+\frac{ax^{n+1}+bx^{n+2}}{(1-x)^2}$, ubi a, b per coefficientes Binomii determinantur. Fit itaque

(E) $bx^{n+2}+ax^{n+1}-1=0$. Quare aequationis (D) resolutio pendet a resolutione aequationis trinomiae (E).

8. Contemplor rursus aequationem aliam

(F) $1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5\ldots$ $+\frac{(n+1)(n+2)x^n}{2}=0$, hancque produci deprehendo per divisionem unitatis factam a binomio

cubico $(1-x)^3$. Inde vero sequens nanciscor resultatum

$$\frac{1}{(1-x)^3}=1+3x+6x^2+10x^3+15x^4\ldots$$
$$+\frac{(n+1)(n+2)x^n}{2}$$
$$+\frac{ax^{n+1}+bx^{n+2}+cx^{n+3}}{(1-x)^3}$$; ex quo aequationem consequor quadrinomiam (G) $cx^{n+3}+bx^{n+2}$ $+ax^{n+1}-1=0$. Quapropter aequationis indefinitae (F) resolutio ad resolutionem aequationis tantum quadrinomiae (G) revocatur.

9. Sit iterum indefinita aequatio

(H) $1+4x+10x^2+20x^3+35x^4+56x^5\ldots$ $+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)x^n}{2.3}=0$. Oritur haec ex divisione unitatis per binomium biquadraticum $(1-x)^4$. Divisione autem perfecta invenitur

$$\frac{1}{(1-x)^4}=(H)+\frac{ax^{n+1}+bx^{n+2}+cx^{n+3}+dx^{n+4}}{(1-x)^4};$$

& quum sit ex hypothesi $(H)=0$; fit ideo

(I) $dx^{n+4}+cx^{n+3}+bx^{n+2}+ax^{n+1}-1=0$.

Quamobrem indefinita aequatio (H) in alteram dumtaxat quinquinomiam (I) promptissime contrahitur.

10. Sit demum generalius aequatio indefinita

$$(\mathrm{K})\ 1 + nx + \frac{n(n+1)x^2}{2} + \frac{n(n+1)(n+2)x^3}{2.\,3}$$
$$+ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)x^4}{2.\,3.\,4} \ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\ldots(n+m-1)x^m}{2.\quad 3.\quad 4.\quad 5\ \ldots\ n}.$$

Animadverto aequationem hanc resultare ex divisione unitatis per binomium $1-x$ ad potentiam n evectum. Divisione autem actu suscepta consequimur

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (K)$$
$$+ \frac{ax^{m+1} + bx^{m+2} + cx^{m+3} + dx^{m+4} \ldots\ldots + ex^{m+n}}{(1-x)^n};$$

& quoniam est ex hypothesi $(K) = 0$, prodibit demum (L) $ex^{m+n} \ldots + dx^{m+4} + cx^{m+3} + bx^{m+2} + ax^{m+1} - 1 = 0$. Propterea indefinita aequatio (K) convertibilis semper est in aliam (L) terminorum numero $n+1$ dumtaxat constantem.

11. Haud absimili methodo summam n ter-

minorum seriei $\frac{1}{x} + \frac{2^m}{x^2} + \frac{3^m}{x^3} + \frac{4^m}{x^4} + \&c.$, designante m numerum quemlibet affirmativum integrum, habebimus in potestate. Sit enim 1.° $m = 0$, ita ut series fiat $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \&c.$ Assumo indeterminatam magnitudinem y, & constituo aequalitatem $\frac{y}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$ &c. *in infin.* Tum duco primi aequationis membri denominatorem $x-1$ in membrum alterum $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ &c. *in infin.*, & productum nanciscor $= 1$. Igitur $y = 1$. Igitur $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ &c. *in infin.* Quaerebatur autem summa tantum n terminorum: proinde oportebit ab $\frac{1}{x-1}$ subtrahere summam terminorum omnium terminum n:mum consequentium. Jamvero termini isti n:mum consequentes sunt $\frac{1}{x^{n+1}} + \frac{1}{x^{n+2}} + \frac{1}{x^{n+3}}$ &c.

in infin., five $\frac{1}{x^n}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right.$ &c. *in infin.* $\left.\right)$, hoc eſt ex dictis $\frac{1}{x^n}\times\frac{1}{x-1}$. Conſequenter ſumma quaeſita prodibit $=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^n}\times\frac{1}{x-1}$.

12. Sit 2.° $m=1$, & ſeries $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{4}{x^4}$ &c. *in infin.* Pono $\frac{y}{(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{4}{x^4}$ + &c. *in infin.* Duco $(x-1)^2$ in ſeriem propoſitam, invenioque productum $=x$. Hinc colligo $y=x$, & $\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{4}{x^4}$ &c. *in infin.* Sunt autem ſeriei termini poſt n:mum $\frac{n+1}{x^{n+1}}+\frac{n+2}{x^{n+2}}+\frac{n+3}{x^{n+3}}+\frac{n+4}{x^{n+4}}$ &c. *in infin.* Horum iccirco ſumma ſubtrahenda erit ab $\frac{x}{(x-1)^2}$. Dividuntur vero iſti in ſeries duas

I. $\frac{n}{x^n}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right.$&c. *in infin.*$\left.\right)=\frac{n}{x^n}\times\frac{1}{x-1}$ (§.11.)

II. $\frac{1}{x^n}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right.$&c. *in infin.*$\left.\right)=\frac{1}{x^n}\times\frac{x}{(x-1)^2}$.

Igitur ſumma quaeſita

$$=\frac{x}{(x-1)^2}-\frac{1}{x^n}\times\frac{x}{(x-1)^2}-\frac{n}{x^n}\times\frac{1}{x-1}.$$

13. Sit 3.° $m=2$, adeoque ſeries $\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{9}{x^3}+\frac{16}{x^4}+$ &c. *in infin.* Capio $\frac{y}{(x-1)^3}=\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{9}{x^3}+\frac{16}{x^4}$ &c. *in infin.*, & ſerie ducta in $(x-1)^3$ invenio productum $=x^2+x$. Igitur $y=x^2+x$. Quare $\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}=\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{9}{x^3}+\frac{16}{x^4}$ &c. *in infin.* Jam termini ſeriei poſt n:mum ſunt $\frac{(n+1)^2}{x^{n+1}}+\frac{(n+2)^2}{x^{n+2}}+\frac{(n+3)^2}{x^{n+3}}+\frac{(n+4)^2}{x^{n+4}}$ &c. *in infin.*, vel etiam $\frac{n^2+2n+1}{x^{n+1}}+\frac{n^2+4n+4}{x^{n+2}}$

$$+\frac{n^2+6n+9}{x^{n+3}}+\frac{n^2+8n+16}{x^{n+4}}+\text{\&c. } in\ infin.$$

fin. Hosce porro terminos dispescere licet in tres series sequentes:

$$\text{I. } \frac{n^2}{x^n}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\ \text{\&c. } in\ infin.\right)=\frac{n^2}{x^n}\times\frac{1}{x-1}$$

$$\text{II. } \frac{2n}{x^n}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{4}{x^4}\text{\&c. } in\ infin.\right)=\frac{2n}{x^n}\times\frac{x}{(x-1)^2}$$

$$\text{III. } \frac{1}{x^n}\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{9}{x^3}+\frac{16}{x^4}\text{\&c. } in\ infin.\right)=\frac{1}{x^n}\times\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}.$$

Ergo summa quaesita

$$=\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}-\frac{1}{x^n}\times\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}-\frac{2n}{x^n}\times\frac{x}{(x-1)^2}-\frac{n^2}{x^n}\times\frac{1}{x-1}.$$

14. Esto 4.° $m=3$, sitque proinde series $\frac{1}{x}+\frac{8}{x^2}+\frac{27}{x^3}+\frac{64}{x^4}+\frac{125}{x^5}+$ &c. *in infin.* Constituta de more aequalitate $\frac{y}{(x-1)^4}=\frac{1}{x}+\frac{8}{x^2}+\frac{27}{x^3}$ &c. *in infin.*, & multiplicata per $(x-1)^4$ assequimur

$$y=(x-1)^4\left(\frac{1}{x}+\frac{8}{x^2}+\frac{27}{x^3}+\text{\&c. } in\ infin.\right)$$

$=x^3+4x^2+x=x(x+2)^2-3x$. Igitur

$$\frac{x(x+2)^2-3x}{(x-1)^4}=\frac{1}{x}+\frac{8}{x^2}+\frac{27}{x^3}\ \text{\&c. } in\ infin.$$

Jamvero seriei termini, qui n.^mum^ consequuntur, sunt $\frac{(n+1)^3}{x^{n+1}}+\frac{(n+2)^3}{x^{n+2}}+\frac{(n+3)^3}{x^{n+3}}+\frac{(n+4)^3}{x^{n+4}}$ &c. *in infin.*, hique distribuuntur in series quatuor sequentes

$$\text{I. } \frac{n^3}{x^n}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\ \text{\&c. } in\ infin.\right)=\frac{n^3}{x^n}\times\frac{1}{x-1}$$

$$\text{II. } \frac{3n^2}{x^n}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\ \text{\&c. } in\ infin.\right)=\frac{3n^2}{x^n}\times\frac{x}{(x-1)^2}$$

$$\text{III. } \frac{3n}{x^n}\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{9}{x^3}\ \text{\&c. } in\ infin.\right)=\frac{3n}{x^n}\times\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}$$

$$\text{IV. } \frac{1}{x^n}\left(\frac{1}{x}+\frac{8}{x^2}+\frac{27}{x^3}\text{\&c. } in\ infin.\right)=\frac{1}{x^n}\times\frac{x(x+2)^2-3x}{(x-1)^4}.$$

Itaque demptis ab $\frac{x(x+2)^2-3x}{(x-1)^4}$ fit summa, quam petimus, $=\frac{x(x+2)^2-3x}{(x-1)^4}-\frac{1}{x^n}\times\frac{x(x+2)^2-3x}{(x-1)^4}$

$$-\frac{3n}{x^n}\times\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}-\frac{3n^2}{x^n}\times\frac{x}{(x-1)^2}-\frac{n^3}{x^n}\times\frac{1}{x-1}$$

15. Sit 5.° $m = 4$, adeoque series $\frac{1}{x} + \frac{16}{x^2} + \frac{81}{x^3} + \frac{256}{x^4} +$ &c. *in infin.* $= \frac{y}{(x-1)^5}$, cujus aequalitatis multiplicato utroque membro per $(x-1)^5$ invenitur $y = x^4 + 11x^3 + 11x^2 + x$. Propterea

$$\frac{1}{x} + \frac{16}{x^2} + \frac{81}{x^3} \text{ \&c. in infin.} = \frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(x-1)^5}.$$

Porro seriei termini, qui n.^mum consequuntur, sunt

$$\frac{(n+1)^4}{x^{n+1}} + \frac{(n+2)^4}{x^{n+2}} + \frac{(n+3)^4}{x^{n+3}} + \frac{(n+4)^4}{x^{n+4}} + \text{\&c.}$$

in infin., nimirum $\frac{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}{x^{n+1}}$

$$+ \frac{n^4 + 8n^3 + 24n^2 + 32n + 16}{x^{n+2}}$$

$$+ \frac{n^4 + 12n^3 + 54n^2 + 108n + 81}{x^{n+3}}$$

$$+ \frac{n^4 + 16n^3 + 96n^2 + 256n + 256}{x^{n+4}} + \text{\&c.}$$

in infin.; atque isti constituunt series quinque sequentes:

$$\text{I. } \frac{n^4}{x^n}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \text{ \&c. in infin.}\right) = \frac{n^4}{x^n} \times \frac{1}{x-1}$$

$$\text{II. } \frac{4n^3}{x^n}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \text{ \&c. in infin.}\right) = \frac{4n^3}{x^n} \times \frac{x}{(x-1)^2}$$

$$\text{III. } \frac{6n^2}{x^n}\left(\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{9}{x^3} \text{ \&c. in infin.}\right) = \frac{6n^2}{x^n} \times \frac{x(x+1)}{(x-1)^3}$$

$$\text{IV. } \frac{4n}{x^n}\left(\frac{1}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{27}{x^3} \text{ \&c. in infin.}\right) = \frac{4n}{x^n} \times \frac{x(x+2)^2 - 3x}{(x-1)^4}$$

$$\text{V. } \frac{1}{x^n}\left(\frac{1}{x} + \frac{16}{x^2} + \frac{81}{x^3} \text{ \&c. in infin.}\right) = \frac{1}{x^n} \times \frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(x-1)^5}.$$

Hisce vero a praecedenti summa subtractis assequimur summam n terminorum $= \frac{x^4 + 11x^3 + 11x^2 + x}{(x-1)^5}$

$$- \frac{1}{x^n} \times \frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(x-1)^5} - \frac{4n}{x^n} \times \frac{x(x+2)^2 - 3x}{(x-1)^4}$$

$$- \frac{6n^2}{x^n} \times \frac{x(x+1)}{(x-1)^3} - \frac{4n^3}{x^n} \times \frac{x}{(x-1)^2} - \frac{n^4}{x^n} \times \frac{1}{x-1}.$$

16. Eadem analysi invenitur series $\frac{1}{x} + \frac{2^5}{x^2} + \frac{3^5}{x^3}$

$$+ \frac{4^5}{x^4} + \frac{5^5}{x^5} \text{ \&c. in infin.} = \frac{x^5 + 26x^4 + 66x^3 + 26x^2 + x}{(x-1)^6}.$$

Ex hactenus vero dictis pronum erit inferre, 1.° Summam seriei generalis $\frac{1}{x} + \frac{2^m}{x^2} + \frac{3^m}{x^3} + \frac{4^m}{x^4}$ &c. *in infin.* protractae exhiberi per fractionem, cujus denominator est binomium $x - 1$ elevatum ad potestatem $m + 1$, cujus potestatis index unitate excedit indicem potestatum numerorum 1, 2, 3, &c. in terminis seriei.

2.° Ejus fractionis numeratorem constare terminorum numero m.

3.° Coefficientes terminorum in ipso numeratore post terminum medium eosdem redire ac ante terminum medium, sed ordine inverso, instar unciarum Binomii.

4.° Coefficientem termini primi in eodem numeratore esse $= 1$

5.° Coefficientem secundi $= 2^m - \frac{m+1}{1}$.

6.° Coefficientem tertii $= 3^m - 2^m . \frac{m+1}{1} + \frac{(m+1)m}{1.2}$.

7.° Coefficientem quarti $= 4^m - 3^m . \frac{m+1}{1} + 2^m . m . \frac{m+1}{1.2} - \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}$.

8.° Coefficientem quinti &c.

Igitur summa seriei $\frac{1^m}{x} + \frac{2^m}{x^2} + \frac{3^m}{x^3} + \frac{4^m}{x^4}$ &c. *in inf.*

$$= \frac{1}{(x-1)^{m+1}} \Big[x^m + \Big(2^m - \frac{m+1}{1}\Big) x^{m-1}$$

$$+ \Big(3^m - 2^m \times \frac{m+1}{1} + m \times \frac{m+1}{1.2}\Big) x^{m-2}$$

$$+ \Big(4^m - 3^m \times \frac{m+1}{1} + 2^m m \times \frac{m+1}{1.2}$$

$$- \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}\Big) x^{m-3} + \text{\&c.} \ldots + x \Big].$$

Si jam ponatur

$$A = \frac{1}{x-1},$$

$$B = \frac{x}{(x-1)^2},$$

$$C = \frac{x^2+x}{(x-1)^3},$$

$$D = \frac{x^3 + 4x^2 + x}{(x-1)^4},$$

$$E = \frac{x^4 + 11x^3 + 11x^2 + x}{(x-1)^5}$$

$$F = \text{, \&c.,}$$

summa autem seriei $\frac{1^m}{x} + \frac{2^m}{x^2} + \frac{3^m}{x^3}$ &c. *in infin.* dicatur W, assequemur summam n tantum terminorum ipsius seriei sequenti expressione exhibitam

$$\left(1 - \frac{1}{x^n}\right) W - \frac{n^m}{x^n} A - \frac{mn^{m-1}}{x^n} B$$

$$- \frac{m(m-1)n^{m-2}}{1.2x^n} C - \frac{m(m-1)(m-2)n^{m-3}}{1.2.3\,x^n} D$$

$$- \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)n^{m-4}}{1.2.3.4\,x^n} E - \text{\&c.};$$

cujus sane expressionis indoles manifesta est, idque habet peculiare, ut quantitates complectatur A, B, C, &c. per x^n divisas, & singillatim multiplicatas per termi-

nos singulos binomii $n-1$ ad potestatem m elati & explicati.

17. Omnibus Algebrae Scriptoribus familiare est, ex aequatione (P) $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots + rx^n = \grave{a} + \grave{b}x + \grave{c}x^2 + \grave{d}x^3 + \grave{e}x^4 \ldots\ldots + \grave{r}x^n$ sequentes deducere aequalitates

$$(M) \quad \begin{aligned} a &= \grave{a} \\ b &= \grave{b} \\ c &= \grave{c} \\ d &= \grave{d} \\ e &= \grave{e} \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ r &= \grave{r} \end{aligned}$$

At hujusmodi illatio doctissimorum licet hominum auctoritate suffulta fallax quandoque & captiosa est. Itaque operae praetium erit limites constituere, conditionesque praescribere, in quibus regula aut recte pronunciat, aut fallit.

18. Igitur converto aequationem (P) in alteram (Q) $a - \grave{a} + (b - \grave{b})x + (c - \grave{c})x^2 + (d - \grave{d})x^3 \ldots + (r - \grave{r})x^n = 0$; & dico generatim, aequalitates (M) semper locum habere si quantitas x in eaquatione (P) valorem habeat diversum a radice qualibet aequationis (Q), ita ut nulla sit istius radix, quae cum magnitudine x prioris aequationis (P) conveniat: & contra, haud recte colligi, pronuncio, aequalitates (M), quotiescumque aequatio (Q) aliquam habuerit radicem realem cum valore x prioris aequationis convenientem. Nam quum aequatio (Q) nihil aliud sit quam aequatio ipsa (P) sub alia forma, nequit haec verificari nisi ubi verificatur & illa. Illa autem (Q) verificatur semper & solum tum accepta x pro una qualibet ex ipsius radicibus, tum assumptis coefficientibus ejus singulis nihilo aequalibus. Igitur verificatur aequatio (P) non solum quando fuerit $a - \grave{a} = 0$, $b - \grave{b} = 0$, $c - \grave{c} = 0$, &c., hoc est quando aequalitates (M) locum habent, verum etiam quoties data qualibet inter coefficientes sibi respondentes a & $\grave{a}$, b & $\grave{b}$, c & $\grave{c}$, d & $\grave{d}$, &c. inaequalitate & discrepantia fuerit x aequalis radici alicui reali aequationis (Q). Quapropter ex aequatione (P) inferri nequeunt aequalitates (M) nisi ubi certo constiterit, valorem quantitatis x in aequatione ipsa (P) spectatum nequaquam reperiri inter radices reales aequationis (Q).

19. Hinc ignorato utcumque valore ipsius x in aequatione (P), sequens sanciri potest

CANON I.

Si tributis quantitati x valoribus perpetuo diversis, numeroque pluribus quam n, *aequationi (P) semper satisfit, stabunt aequalitates (M).*

Nam aequatio (Q) nequit plures quam n radices habere; proindeque valor aliquis ipsius x in aequatione (P) necessario differet a radicibus aequationis (Q).

20. A fortiori statui potest

CANON II.

Stabunt aequalitates (M), si valor ipsius x in aequatione (P) variabilis fuerit, utcumque arcti sint variationis limites.

Etenim intra hosce limites numerus valorum ipsius x semper excedet n.

Huc spectat casus quantitatis x infinitesimae, vel infinitae; siquidem nulla est infinitesima, vel infinita quantitas in ſe determinata, & quod infiniteſimum, vel infinitum dicimus nihil aliud eſt niſi indefinitum perpetuo decreſcens, aut creſcens ultra datum quemlibet limitem.

21. Corruit ſummorum etiam Geometrarum ratiocinatio (b), qui in aequatione (P) aſſumpta $x = 0$, inde colligunt aequalitates (M); quum tamen ex illa aſſumptione una tantum deduci poſſit aequalitas $a = a'$, caeterae non item. Sane utcumque inaequales ſint coefficientes b & b', c & c', d & d', e & e', &c., dummodo ſit $a = a'$, ſubſiſtit aequatio (P), quae evaneſcentibus terminis omnibus praeter primos utriuſque membri mutatur in $a + o = a' + o$, ſive $a = a'$.

22. Exemplum illegitimae illationis aequalitatum (M) ex aequatione (P) extra praeſcriptas conditiones habetur vel in tribus tantum terminis $a + bx + cx^2 = a' + b'x + c'x^2$, ubi

$$a = 1 \qquad a' = 6$$
$$b = 4 \qquad b' = 8$$
$$c = 3 \qquad c' = 2$$
$$x = 5$$
$$x = -1.$$

(b) Conſule unum inſtar omnium magnum **EULERUM** in *Intr. ad An. Inf.* tom. 1. §. 214.

Oritur enim $1 + 4x + 3x^2 = 6 + 8x + 2x^2$, & poſito $x = 5$, fit $1 + 4 \times 5 + 3 \times 25 = 6 + 8 \times 5 + 2 \times 25 = 96$, atque iterum ſumpto $x = -1$, invenitur $1 - 4 + 3 = 6 - 8 + 2 = 0$. Valores 5, & -1 quantitatis x eruti ſunt ex aequatione $(c - c')x^2 + (b - b')x + a - a' = 0$, quae de more tractata dat $x = \frac{b'-b}{2c-2c'} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{b'-b}{2c-2c'}\right)^2 + \frac{a'-a}{c-c'}\right)}$.

23. Tertius ſanciri poteſt Canon de coefficientium hujuſmodi aequalitate, ſcilicet

CANON III.

Si omnes praeter unum coefficientes prioris membri aequationis (P) *aequantur coefficientibus homologis alterius membri, etiam reliquus aequatur reliquo, quicumque ſit ipſius x valor praeter nihilum.*

Sublatis enim hinc inde terminis omnibus inter ſe aequalibus, perſeverabit aequalitas inter duos illos reliquos, qui iccirco diviſi per poteſtatem, quam ibidem obtinet x, relinquent coefficientes aequales.

24. Etiamſi utrumque aequationis (P) membrum ſit nihilo aequale, non poſſunt tamen generaliter inferri aequalitates (M) quoties pro x accipitur radix aliqua membri alterutrius. Nam ex $a + bx + cx^2$

$+ dx^3 + ex^4 \ldots\ldots + rx^n = a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + e'x^4 \ldots + r'x^n = 0$, protinus deducitur

$$(R)\ x^n \ldots + \frac{e}{r}x^4 + \frac{d}{r}x^3 + \frac{c}{r}x^2 + \frac{b}{r}x + \frac{a}{r} = 0,$$

$$\&\ (S)\ x^n \ldots + \frac{e'}{r'}x^4 + \frac{d'}{r'}x^3 + \frac{c'}{r'}x^2 + \frac{b'}{r'}x + \frac{a'}{r'} = 0.$$

Quum autem ex Algebra notum ſit, coefficientem ſecundi termini aequationis cujuſcumque eſſe ſummam omnium radicum, coefficientem tertii ſummam productorum e binis, coefficientem quarti ſummam productorum e ternis, quinti e quaternis; &c. & coefficientem ultimi eſſe productum ex omnibus radicibus, aequales iccirco erunt aequationum (R), (S) coefficientes homologii

$$\frac{a}{r} = \frac{a'}{r'}$$
$$\frac{b}{r} = \frac{b'}{r'}$$
$$\frac{c}{r} = \frac{c'}{r'}$$
$$\frac{d}{r} = \frac{d'}{r'}$$
$$\frac{e}{r} = \frac{e'}{r'}$$

. . . . .

. . . . .

. . . . .

atque hinc eliciuntur aequalitates

$\frac{r}{r'} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'} = \&c.$, quae tantum docent, coefficientes homologos eſſe in eadem ſemper ratione, utcumque ſint inaequales.

25. Id ipſum oſtenditur ducta aequatione $a + bx + cx^2 \ldots + rx^n = 0$ in m, ex quo oritur $ma + mbx + mcx^2 \ldots + mrx^n = 0$, quin tamen ſit $a = ma$, $b = mb$, &c.

26. Illud tamen in hac hypotheſi verum deprehenditur, quod ſi coefficientes duo quilibet homologi inter ſe aequantur, etiam caeteri omnes aequantur; habent enim omnes rationem eandem, ſcilicet in hoc caſu rationem aequalitatis.

27. Haec vero locum ſibi vindicant ubi non modo utrumque aequationis (P) membrum ponatur nihilo aequale, verum etiam ubi radices omnes ambarum aequationum inde reſultantium ſint utrimque communes. Si enim duae aequationes ex binis illis membris nihilo aequalibus ortae unam tantum haberent radicem communem, aut ſaltem non omnes communes, ſubrogato in utraque aequatione valore radi-

cis communis pro x, fieret utraque $= 0$, & nihilominus coefficientes utcumque inaequales eſſe poſſent, ac minime proportionales.

Satis ſint hactenus dicta ad illuſtrationem methodi per univerſam Analyſim magno emolumento uſitatae, quae vulgo dicitur Methodus Indeterminatarum, a Carteſio primum incredibili Scientiae incremento in Analyſim invecta.

DISQUISITIO XIII.

De Infinito Logarithmico.

1. IN explicanda geneſi quantitatum logarithmicarum & exponentialium magnitudines occurrere tum infinitas tum infiniteſimas, hoc eſt aſſignabili qualibet majores minoreſve, in confeſſo eſt apud Auctores, qui hac de re accuratius diſſeruerunt, prae caeteris Magnum EULERUM in eximia *Ad Infinitorum Analyſim Introductione Cap.* VI. & VII., *Tom.* I. Verum magnitudines illas infinitas infiniteſimaſque inaudita quadam planeque admiranda donari indole ac natura, propriaſque notas & caracteres ſingularitate mirifica inſignes prae ſe ferre, id vero eſt quod Geometrarum hactenus nemo (quod ego ſciam) ſuſpicatus eſt.

2. Itaque harum quantitatum eam eſſe praecipuam notam oſtendam, ut non modo quae infinitae ſunt, infinities deprehendantur minores Infinito *primi ordinis*, quale exhibetur per infinitarum unitatum ſeriem $1 + 1 + 1 +$ &c. *in infin.*, ſed etiam infinito *ordinum* numero diſtent ab Infinito *ordinis primi*, utque hic infinitus *ordinum* numerus, quo infra *primi ordinis* Infini-

tum deprimuntur, fit rurfus Infinitum diftans infinito *ordinum* numero ab Infinito primo, atque iterum nova haec ordinum infinita diftantia fpectet ad infinitum, quod diftat rurfus numero *ordinum* infinito a primo; ficque porro femper, *neque* enim, magno NEWTONO ajente (*a*) *novit natura limitem*.

Sed quoniam probe intelligo, hos infinitorum ordines delicatiffimi faftidii hominibus ftomachum movere, ac vel ipfum *infiniti* vocabulum ludibrio effe, operae pretium me facturum exiftimo, fi hac de re, ut nullus perverfae interpretationi relinquatur locus, quid ipfe fentiam, diftincte dilucideque explicavero.

3. Itaque hac fuper re in fententiam eo amiciffimi doctiffimiqne KÄSTNERI, qui in exquifito Schediafmate *De Vera Infiniti Notione* (*b*) rem fuapte natura retrufam & captiofis plurium Geometrarum tendiculis implicatam ea perfpicuitate aperit enucleatque, ut nihil defiderandum relinquat. Affero ejus locum licet paullo longiorem tum quod multa egregia & fingularia complectitur, tum quod melius ac preffius dici a me poffe defpero: » Antiquae Graeciae, inquit Cl. KÄSTNERUS, notum eft hanc effe laudem, ut quae

(*a*) Princ. Lib. I. Sect. I. Lemm. XI. Schol.

(*b*) Vid. Abr. KÄSTNERI *Differtat. Mathemat. & Phifit.* ALTENBURGI 1771. *Differt.* V.

pulchritudinis abfolutae, eadem etiam certitudinis fummae exemplaria nobis praebeat: igitur poftquam inter Geometras percrebuit *Infiniti* nomen, paullo poft CARTESIUM, qui illud adeo adhuc reformidabat, ut mallet *Indefiniti* vocabulo uti, fuerunt qui oftenderent, nihil illis de infinito adfertis contineri, quod non cum antiquorum placitis congrueret; alii laboris huius pertaefi, ipfaque novitatis fpecie delectati theoriam quandam Infiniti commenti funt multa continentem, quae in fcriptis antiquorum verfatus non poffit non, fic ut ipfi oftenduntur, incredulus odiffe. Ita FONTENELLIUS, ne fcilicet feveriffimi eruditorum Geometrae fabula milefia plane carerent, de Infinito talem adornavit, in qua praeter alia jucundiffima quantitates etiam reperias, quae nec finitae fint, nec infinitae, & quibus velut *pontibus* ex finito ad infinitum eatur. Sed, ut aeque vere ac jocofe obfervabat *B*. HAUSENIUS, non cogitavit, ut ad hos pontes ex finito tranfeatur, aliis pontibus opus effe. Quam veram judicem infiniti ideam, brevibus explicare liceat.... Infinite magnam vocant quantitatem, cujus incremento limes nullus ftatui poteft, & quae major omni dabili concipitur; quod idem eft ac fi dicas ipfam non dari, alias dum omni quae datur major eft, fe ipfa major effet. Igitur *infinite magnum* non *quantitatis* nomen eft, fed *poffibi-*

V

litatis fine fine, & ultra omnes limites crescendi. Contra *infinite parvum* non *quantitas* est, sed ea *quantitatis adfectio*, qua *fine limite decrescere, omnique proposita minor fieri potest....* Hoc sensu infiniti vocabulo tributo, nihil paradoxi omnibus de infinito adsertis contineri perspicitur, ut infinitum aliud alio majus immo infinities majus esse. Trianguli rectanguli angulus unus sit 30. graduum: igitur crus ei oppositum hypothenusae perpetuo dimidium erit, cujuscunque magnitudinis sint crus & hypothenusa. Potest autem crus data quavis recta majus sumi, & tunc hypothenusa duplo ejusdem rectae major fiet, quod dicunt crus infinitum fieri posse, ejusque infiniti duplam fieri hypothenusam. Ordinata parabolae quadrato abscissae exprimitur parametro pro unitate adsumpta, ut possint lineae ad numeros revocari: Potest autem abscissa numerum quemvis superare ejusque numeri quadratum superat ordinata, quod dicitur, ordinatam exprimi quadrato abscissae infinitae, adeoque illam infinities continere. Ita infinita aliis infinitis infinities majora intelliguntur.... Intelligitur simul verum Infiniti usum nihil continere, quod a communibus Geometrarum notionibus recedat. Qui in illo incomprehensibilia, & tantum non contradictoria reperiunt, ambiguitate verborum plerumque falluntur, & infinitum quod revera

adfectio quantitatis est, pro quantitate ipsa habent. Sed quas poetis, & reliquis, qui delectare volunt, scriptoribus severior critica interdixit dilogias, in illis ingenii gloriolam quaerere veri custodes Geometras parum decebit ». His ad mentem Viri acutissimi, qui rem acu tetigit, praemissis, omnique adeo cavillandi ansa sublata, redeo in viam.

4. Voco *Infinitum Ordinis Primi*, vel *Infinitum Primum*, vel simpliciter *Infinitum* illud, quod exsurgit ex serie unitatum semper continuata $1 + 1 + 1 + 1 +$ &c. *in infin.*, vel ex continua repetitione magnitudinis cujuscumque determinatae $a + a + a +$ &c. *in infin.*, sive quod repraesentatur ab expressionibus $\frac{1}{1-1}$, $\frac{a}{1-1}$. Quamvis enim alterum alteri sit inaequale, ratio tamen unius ad alterum finita est ac determinata, nimirum $1 : a$.

5. *Infinitum Primum* designabo littera n.

6. Appello *Infinitum Ordinis semper infinitesimi*, vel *Infinitum Paradoxum* illud, quod non modo infinities minus est Infinito Primo, sed ab eodem distat, vel infra ipsum deprimitur numero ordinum infinito, qui infinitus ordinum numerus non solum infinities est minor Infinito Primo, sed rursus ab eodem distat numero ordinum infinito; sicque porro semper.

7. *Infinitum Paradoxum* designabo littera p.

8. Data aequalitate $x^x = n$, facile ostenditur, nihil aliud esse posse x nisi *infinitum*, & quidem *infinitum paradoxum*, vel rationem habens finitam ad infinitum paradoxum p, vel denique rationem expressam ab alio infinito paradoxo respectu ipsius p, quemadmodum est p respectu infiniti primi: si enim *nullum novit natura limitem*, evidentissimum est, dari infinitum paradoxum p' respectu ipsius p, quemadmodum datur p respectu infiniti primi, atque hujusmodi esse p'' prae p', p''' prae p'', p^{V} prae p''', sicque porro sine fine. Liquet id, si assumatur aequalitas $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = n$, ubi x nequit esse aliud nisi infinitum paradoxum ordinis quantumlibet depressi infra infinitum paradoxum p ordinis primi.

9. Hinc, ut infinitum paradoxum x in infinitum primum convertatur, elevandum est ad potestatem, cujus exponens est infinitum ipsum paradoxum.

10. Hinc radix, cujus gradus est *infinitum paradoxum*, educta ex infinito primo, dat infinitum ipsum paradoxum.

11. Hinc denique logarithmus infiniti paradoxi abit in logarithmum infiniti primi divisum per infinitum ipsum paradoxum.

12. Dicatur e numerus, cujus logarithmus hyperbolicus aequatur unitati: & habetur sequens

THEOREMA I.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \text{ seu } \left(\frac{1+n}{n}\right)^n = e.$$

DEM.

Formula $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ in seriem ad normam Binomii Newtoniani explicata assequimur $\frac{1}{n^n}\Big(n^n + n.n^{n \bowtie 1}$

$$+ \frac{n.n-1.}{2} n^{n \bowtie 2} + \frac{n.n-1.n-2.}{2.3} n^{n \bowtie 3}$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{2.3.4} n^{n \bowtie 4} + \&c.\Big).$$

Sed ob $n = \infty$ evanescunt prae ipso numeri 1, 2. 3, 4, &c., qui ab eodem demuntur. Igitur praedicta formula fit

$$\frac{1}{n^n}\Big(n^n + n.n^{n \bowtie 1} + \frac{n^2}{2}.n^{n \bowtie 2} + \frac{n^3}{2.3}.n^{n \bowtie 3} + \frac{n^4}{2.3.4}n^{n \bowtie 4}$$

$$+ \&c.\Big) = \frac{1}{n^n}\Big(n^n + n^n + \frac{n^n}{2} + \frac{n^n}{2.3} + \frac{n^n}{2.3.4} + \&c.\Big)$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \&c.$$

Notum autem eſt, ex Logarithmorum Doctrina, eſſe

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \&c. = e.$$ Igitur

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828183 = e.\ Q.\ E.\ D.$$

13. Eſto f numerus unitate major, k vero talis, ut inter f, & k haec habeatur aequatio $f = 1 + k + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{2.3} + \frac{k^4}{2.3.4} + \frac{k^5}{2.3.4.5} + \&c.$ Hoc poſito oritur

THEOREMA II.

$$f^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{k}{n}.$$

DEM.

Conſectarium id eſt ex Capite VII. *Eulerianae Introductionis* tom. 1. nullo negotio inferendum. *Q.E.D.*

THEOREMA III.

14. $$n^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{p}{n}\ *$$

DEM.

1° Nequit eſſe $n^{\frac{1}{n}} = 1$, ſecus foret $n = 1^n = 1$, quod eſt abſurdum.

2° Nequit eſſe $n^{\frac{1}{n}} = 1 + g$ (ſumpto pro g numero quolibet integro); ſecus foret $n = (1 + g)^n$: eſt autem $(1 + g)^n$ infinities major quam n, ut liquet evidentiſſime.

3° Nequit eſſe $n^{\frac{1}{n}} = 1 + \varphi$ (deſignante φ numerum fractum quemcumque); hinc enim efficitur $n = (1 + \varphi)^n = 1 + n.\varphi + \frac{n.n-1.}{2}\varphi^2 + \frac{n.n-1.n-2.}{2.3}\varphi^3 + \&c.$; quod omnino repugnat, ſiquidem ſeries $1 + n.\varphi + \frac{n.n-1.}{2}\varphi^2 + \&c.$ eſt manifeſte in immenſum major quam n.

* Pro p intellige vel infinitum ipſum paradoxum, de quo ſupra, vel id, quod ad infinitum paradoxum rationem habet finitam quamcumque, quodque adeo nomen idem *infiniti paradoxi* jure retinet.

4.° Non potest denique esse $n^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{k}{n}$ (posito k finito); quandoquidem inde colligeretur $f^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}}$ §. 13., seu $f = n$, hoc est finitum aequale infinito.

Restat ergo, ut fiat $n^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{x}{n}$ existente x infinito, sed in immensum minore quam n. Hinc autem oritur $n = \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = 1 + x + \frac{n.n-1.x^2}{2n^2} + \frac{n.n-1.n-2.x^3}{2.3n^3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.x^4}{2.3.4n^4}$ + &c. Sed ob $n = \infty$ fit $n - 1 = n$, $n - 2 = n$, $n - 3 = n$, &c. igitur $n = \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5}$ + &c. Inde vero consequens est, quantum x non modo infinitum esse infinities minus quanto n, sed spectare praeterea ad ordinem infinite humiliorem ordine ipsius n: nam in altero hujus aequalitatis membro ascendit x ad potestatem semper altiorem quo longius protrahitur evolutio binomii $\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$, idque sine fine. Ex hoc denique facili ratiocinatione efficitur, non differre x ab *infinito paradoxo p*. *Q.E.D.*

15. Peccatum itaque est ab ingeniosissimo *FONTENELLIO* in Opere alioquin elegantissimo *De Infiniti Geometria* (*a*), dum affirmate pronunciat, excessum quantitatis $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ supra unitatem non esse infinitesimam quantitatem, sed omnino *finitam*. Esto jam

(a) Vid. *FONTENELLE Elemens de la Géomètrie de l' Infini* §. 263. Vere de hoc Opere cetera elaboratissimo ALEMBERTUS *in Mél. de Littér. tom. V*. §. *XV*. *la lecture en est d' autant plus dangereuse aux jeunes Géometres, que l' Auteur y présente ses sophismes avec une sorte d' élégance, & pour ainsi dire, de grace, dont le sujet ne paroissoit pas susceptible. Il semble que les ouvrages géomètriques de ce Philosophe soient destinés à produire sur les jeunes gens qui entrent dans la carriere des Sciences, le même effet que ses ouvrages de Belles-Lettres sur les jeunes Littérateurs, celui d' égarer les uns & les autres par des défauts d' autant plus propres à séduire, qu' ils se trouvent & agréables par eux mêmes, & joints d' ailleurs à des beautés réelles*. Ceterum quicquid sit de hujus Operis lectione Tironibus interdicenda, nihil aptius, nihil verius de hoc geometrico FONTENELLII libro hinc acriter vexato, inde effuse laudato mihi dici posse videtur quam quod de *SENECA Institut. Lib. X. Cap. I.* QUINTILIANUS, *abundat dulcibus vitiis... verum sic quoque jam robustis, & severiore genere satis firmatis legendus, vel ideo, quod exercere potest utrumque judicium. Multa enim probanda in eo, multa etiam admiranda sunt: eligere modo curae sit, quod utinam ipse fecisset. Digna enim fuit illa natura, quae meliora vellet, quae quod voluit effecit*.

THEOREMA IV.

Log. $n = p$.

DEM.

Per Theor. III. est $n^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{p}{n}$. Igitur sumptis Logarithmis fiet $\frac{1}{n}\, log.\, n = log. \left(1 + \frac{p}{n}\right)$. Est autem ex Logarithmorum Doctrina $log. \left(1 + \frac{p}{n}\right) = \frac{p}{n} - \frac{p^2}{2n^2} + \frac{p^3}{3n^3} - \frac{p^4}{4n^4} + \&c.$, haecque series ob quantitatem $\frac{p}{n}$ infinitesimam non differt ab ipsa $\frac{p}{n}$: iccirco consequitur $\frac{1}{n}\, log.\, n = \frac{p}{n}$, hoc est $log.\, n = p$. *Q. E. D.*

ALITER.

Ex demonstratione Theorematis III. colligitur $n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \&c.$ *in infin.* Jamvero

series isthaec ex Logarithmorum Theoria numerum exprimit, cujus Logarithmus hyperbolicus est ipse x, nimirum est $x = log. \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \&c.\right)$. Igitur $x = log.\, n$. Sed x non differt a p, ut patet ex Theorematis praecedentis demonstratione. Ergo $x = p = log.\, n$. *Q. E. D.*

17. Convergentiae defectus in serie $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \&c.$ demonstrationis secundo loco allatae vim non infirmat eo quod seriei valor debet augeri sine fine, eoque magis quo longius illa protrahitur, ac tandem adaequare infinitum ipsum primum n.

Cave suspiceris, antilogiam reperiri inter hoc IV. Theorema, & §. 11., ubi logarithmus infiniti primi declaratur aequalis non infinito soli paradoxo, sed facto ex hoc ipso, & ejus logarithmo. Ibi enim *infiniti paradoxi* genesis deducta est ab aequalitate $x^x = n$, quae, ut notum est, parit $n = 1 + x\, log.\, x + \frac{x^2\, log.^2 x}{2}$

$+\frac{x^3 \log^3 x}{2.3} + \frac{x^4 \log^4 x}{2.3.4} +$ &c.; hic vero deducta est ab aequalitate $n = 1 + x' + \frac{x'^2}{2} + \frac{x'^3}{2.3} + \frac{x'^4}{2.3.4} +$ &c.; unde manifeste colligitur $x' = x \log. x = \log. n$, quod antilogiam omnem amovet. Id ipsum perspicue infertur ex harum etiam serierum indole; prior enim $1 + x \log. x + \frac{x^2 \log^2 x}{2} + \frac{x^3 \log^3 x}{2.3} + \frac{x^4 \log^4 x}{2.3.4} +$ &c. numerum repraesentat, cujus logarithmus hyperbolicus est ipse $x \log. x$, altera vero $1 + x' + \frac{x'^2}{2} + \frac{x'^3}{2.3} +$ &c. numerum exprimit, cujus hyperbolicus logarithmus est x'. Igitur $\log. n = x \log. x = x' = p$.

THEOREMA V.

Tab.III. 18. Capti in Hyperbola Apolloniana *OGK* asymptoti partibus *AB*, *AC*, *AD*, *AE*, &c. continue pro-
Fig.13. portionalibus sine fine ita ut evadat $AS =$ *infinito*

primo n, erectisque alteri asymptoto parallelis *BG*, *CH*, *DI*, *EK*, &c. in infin.; ajo, numerum spatiorum inter se aequalium *GBCH*, *HCDI*, *IDEK.*, &c. in infin. non differre *ab infinito paradoxo p*.

DEM.

Constat, eorum spatiorum inter se aequalium numerum, quem voco x, aequari numero terminorum progressionis geometricae, productae usque ad terminum *AS* sive n, dempta unitate. Est autem ex Progressionum Doctrina $\frac{AS}{AB}$, seu $\frac{n}{AB} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^x = \left(\frac{AB+BC}{AB}\right)^x = \left(1 + \frac{BC}{AB}\right)^x = 1 + x.\frac{BC}{AB} + \frac{x.x-1.}{2} \times \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{x.x-1.x-2.}{2.3} \times \frac{BC^3}{AB^3} + \frac{x.x-1.x-2.x-3.}{2.3.4} \times \frac{BC^4}{AB^4} +$ &c.; ac praeterea valor τοῦ x nequit esse nisi infinitus, ut patet: Igitur ducto utroque aequalitatis membro in *AB*, neglectisque numeris 1, 2, 3, &c. ab x auferendis, fiet $n = AB + x.BC + \frac{x^2}{2}.\frac{BC^2}{AB} + \frac{x^3}{2.3}.\frac{BC^3}{AB^2} + \frac{x^4}{2.3.4}.\frac{BC^4}{AB^3} +$ &c. Quapropter traductis huc praecedentibus ratiocinationibus palam eſt, valorem τῦ x ſpectare ad *infinitum* aliquod *paradoxum* p. *Q. E. D.*

C O R.

Hinc conſequitur, ſpatium hyperbolico-aſymptoticum $GBSK$ ſine fine protractum eſſe *infinitum paradoxum* reſpectu infinitae aſymptoti AS ductae in rectam quamlibet finitam. Eſto demum

THEOREMA VI.

19. In progreſſione geometrica creſcente $\div\, a,\ b,\ \frac{b^2}{a^2},\ \frac{b^3}{a^3},\ \ldots\ \frac{b^x}{a^{x-1}}$ eo uſque producta, ut terminus $\frac{b^x}{a^{x-1}}$ evadat $= n$, ajo terminorum numerum $x - 1$, adeoque & x *infinitum* eſſe *paradoxum* reſpectu ipſius n.

D E M.

Ob progreſſionem geometricam creſcentem erit $b = a + c$. Ergo $\frac{b^x}{a^{x-1}} = \frac{ab^x}{a^x} = a\left(\frac{a+c}{a}\right)^x = a\left(1 + \frac{c}{a}\right)^x$

$$= a\left(1 + \frac{xc}{a} + \frac{x.x-1.c^2}{2a^2} + \frac{x.x-1.x-2.c^3}{2.3\,a^3} + \frac{x.x-1.x-2.x-3.c^4}{2.3.4\,a^4} + \&c.\right) = n$$

per hypotheſim. Ergo &c. *Q. E. D.*

THEOREMA VII.

20. Sint a, b numeri quilibet finiti; & $\left(\frac{a+b}{a}\right)^x = n$: ajo, eſſe x *infinitum* aliquod *paradoxum*.

D E M.

Explicato Binomio $\left(\frac{a+b}{a}\right)^x$ in ſeriem oritur $1 + \frac{x.b}{a} + \frac{x.x-1.b^2}{2a^2} + \frac{x.x-1.x-2.b^3}{2.3\,a^3} + \frac{x.x-1.x-2.x-3.b^4}{2.3.4\,a^4} +$ &c. in infin. $= n$.

Nequit autem eſſe exponens x niſi infinitus, ut patet, ſecus aequalitas $\left(\frac{a+b}{a}\right)^x = n$ omnino repugnaret. Ergo praedicta ſeries mutabitur in $1 + \frac{x.b}{a} + \frac{x^2.b^2}{2a^2} + \frac{x^3.b^3}{2.3\,a^3} + \frac{x^4.b^4}{2.3.4\,a^4} +$ &c. $= n$. Atque hinc eadem, qua ſupra, ratiocinatione efficitur, exponentem x nihil aliud eſſe poſſe niſi infinitum aliquod paradoxum. *Q. E. D.*

21. Ex poſitione $\left(\frac{a+b}{a}\right)^x = n$ conſequitur

$\left(\frac{a}{a+b}\right)^x = \frac{1}{n} =$ infiniteſimo primi ordinis. At hic poſſet quiſpiam offendere propter antilogiam, quae inopinato ſe offert: nam ſi fiat $a+b=c$, adeoque $a = c-b$, habetur $\frac{1}{n} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^x = \left(\frac{c-b}{c}\right)^x$; & ſuſcepta evolutione binomii $\left(\frac{c-b}{c}\right)^x$ reperitur $\frac{1}{n} =$

$$1 - \frac{x \cdot b}{c} + \frac{x \cdot \overline{x-1} \cdot b^2}{2c^2} - \frac{x \cdot \overline{x-1} \cdot \overline{x-2} \cdot b^3}{2 \cdot 3 c^3}$$

$$+ \frac{x \cdot \overline{x-1} \cdot \overline{x-2} \cdot \overline{x-3} \cdot b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 c^4} - \&c. \textit{ in infin.} = 1 -$$

$$\frac{x \cdot b}{c} + \frac{x^2 \cdot b^2}{2c^2} - \frac{x^3 \cdot b^3}{2 \cdot 3c^3} + \frac{x^4 \cdot b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4c^4} - \&c. \textit{ in infin.}$$

In hac vero ſerie termini ſinguli poſt primum ſunt infinite magni, & quidem perpetuo creſcentes: conſequenter $\frac{1}{n}$, hoc eſt infiniteſimum reperitur aequale infinito; quod certe immane eſt abſurdum. At cum reputo, ſeriei terminos eſſe alternis vicibus affirmativos & negativos, proindeque alios ab aliis ita elidi poſſe, ut tota ſumma evadat infiniteſima, nullam amplius invenio antilogiam. Confirmo id exemplo ex finitis magnitudinibus petito: Evolvatur in ſeriem Binomium $(1-y)^{10}$, ut fiat $1-10y+45y^2-120y^3+\&c.$ Tum capiatur $y=0,9$; eritque $(1-y)^{10}=(0,1)^{10}=$

$1-9+45 \cdot 0,81 - 120 \cdot 0,729 + \&c. =$
$1-9+36,45 - 87,480 + \&c.$

Evidentiſſimum eſt, numerum ſatis magnum negativum, qui oritur ex collectione horum quatuor primorum ſeriei terminorum, deſtrui omnino per adjectionem ſequentium ita ut omnes collecti minimam fractionem $(0,1)^{10}$ repraeſentent.

Id ipſum Cl. KÄSTNERUS, quem hac de re conſulebam, urbane reſpondebat GOTTINGA prid. Kal. Oct. ann. 1777., ſubdebatque Vir optimus, *nulla ſe offert contradictio, etſi quomodo id, quod ſeries enunciat, cum aliis veris cohaereat, paullo difficilius perſpiciatur: omnino ut in Myſteriis Religionis Chriſtianae, quae non vituperarent qui ſaeculo noſtro ſapere ſibi videntur, ſi quantum inſit myſteriorum non ſolum in rerum natura, ſed in ipſo intellectuali ſyſtemate, quo Geometria continetur, percepiſſent.*

Ceterum hujus terminorum eliſionis in ſeriebus algebraicis, in quibus ea minus apparet, luculentiſſimum mihi offert exemplum Newtoniana decantata ſeries $(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ + \&c.$ Si enim educenda proponatur radix quadrata ex quadrato perfecto a^2

$+ 2ab + b^2$, quam radicem ſcimus eſſe $a+b$, fiatque ideo $P=a^2$, $Q=\frac{2ab+b^2}{a^2}$, $m=1$, $n=2$, oritur radicis quaeſitae valor expreſſus per ſeriem $a + \frac{1}{2} a \times \left(\frac{2ab+b^2}{a^2}\right) - \frac{1}{8} a \left(\frac{2ab+b^2}{a^2}\right)^2 + \frac{1}{16} a \left(\frac{2ab+b^2}{a^2}\right)^3 - \frac{5}{128} a \left(\frac{2ab+b^2}{a^2}\right)^4 +$ &c. Jamvero nemo initio cogitaverit, ſeriem hanc nullibi interruptam & in infinitum progredientem contrahi in duos tantummodo terminos $a+b$, uti res poſtulat. Attamen ſi evolvantur poteſtates $\left(\frac{2ab+b^2}{a^2}\right)^2$, $\left(\frac{2ab+b^2}{a^2}\right)^3$, $\left(\frac{2ab+b^2}{a^2}\right)^4$, &c. perſpicue apparebit, ita ſe invicem deſtruere ſeriei terminos, alios poſt alios, ut ſoli ſuperſint priores bini $a+b$.

DISQUISITIO XIV.

DE PERCUSSIONE, AUT RESISTENTIA, QUAM GLOBUS A FLUIDO IMPINGENTE, VEL IMPACTO PATITUR, PER EXPERIENTIAM DEFINIENDA.

1. Nullus huc uſque fuit in univerſa Hydrodynamica locus acrioribus Geometrarum ſtudiis diſſidiiſque vexatus quam is qui refertur ad celeberrimam illam de Percuſſione Fluidorum controverſiam, quae poſtquam per ſeptuaginta & amplius annos ſummos Viros in partes diſtraxit, noviſſime tandem per accuratiſſima Regiis ſumptibus ab illuſtrioribus Galliae Philoſophis capta pericula videtur maximam partem dirempta, & quaſi electis a tota Europa Arbitris dijudicata & compoſita (a). Ex hiſce demum experimen-

(a) Vid. *Nouvelles Expériences ſur la Réſiſtance des Fluides*, par MM. D'ALEMBERT, le Marquis DE COMDORCET, & l' Abbé BOSSUT . . . . Mr. l'Abbé BOSSUT, *Rapporteur*. Paris 1777.

tis certo constitit, & quasi sacra Legum sanctione firmatum fuit, 1.° Resistentias, quas corpus figura qualibet praeditum, & variis velocitatibus in fluido indefinito latum patitur, esse quamproxime quadratis velocitatum proportionales; & hac in re Experientiam cum Theoria prope consentire. 2.° Resistentias perpendiculares ac directas, quas planae superficies eadem velocitate motae patiuntur, esse fere superficierum magnitudinibus proportionales; & hic quoque Theoriam, atque Experientiam satis concordes esse. 3.° Resistentias ab obliquis motibus provenientes rationem sequi longe diversam a ratione duplicata sinuum angulorum incidentiae, & consequenter Experientiam hic magnopere diffidere a Theoria, quae obliquam Resistentiam quadrato sinus incidentiae ponit proportionalem (*b*). 4.° Mensuram absolutam Resistentiae perpendicularis

(*b*) Lego nunc in Litteratorum Diariis, clarissimum BOSSUT anno superiore 1779. exeunte coram Parisiensi Scientiarum Academia praelegisse commentariolum, in quo novis allatis experimentis, obliqui fluidorum impactus legem theoretice constitutam, sed usu mendosam ita emendat castigatque, ut obliquas resistentias proportionales statuat non quadratis tantum sinuum angulorum incidentiae, ut vulgaris ferebat lex, sed proportionales sinuum quadratis una cum potestatibus $3\frac{1}{4}{}^{is}$: cosinuum angulorum eorundem.

& directae, cui planum in fluido homogeneo & indefinito progrediens objicitur, sat proxime haberi ex pondere columnae ipsius fluidi, cujus columnae basis aequatur plano in fluidum incurrenti, altitudo vero ea est, quae debetur plani velocitati, ex qua nimirum grave a quiete libere decidens velocitatem acquirit plani velocitati aequalem.

2. Eversa porro vulgari obliquorum impactuum lege de resistentiae quadrato sinus incidentiae proportionali illud consequens erat, ut curvarum superficierum resistentiae per eandem legem theoretice definitae ab iis valde discreparent, quas experientia demonstrat. Atque hinc resistentia Globi, quam resistentiae baseos dimidiam Theoria exhibet, incerta adhuc erit minimeque explorata, donec experimentis data opera institutis in lucem protracta fuerit, & citra omnem ambiguitatem constabilita. De experimentis dicam mox, nunc Globi resistentiam theoretice, sed via ab aliis paullulum diversa proponam.

3. Sit itaque BCO quadrans areae circularis, isque convertatur circa semidiametrum immotam BC, Tab. III. ita ut ex conversione areae oriatur hemisphaerium, & Fig. 12. ex conversione arcus quadrantalis BO producatur superficies hemisphaerica. Capto jam arcu infinitesimo Pp, ductisque in semidiametrum CO perpendiculis PG,

pg, evidens fit, ex rotatione minimi arcus Pp gigni zonam *elementarem* superficiei hemisphaericae, & ex rotatione lineolae Gg gigni zonam *elementarem* circularis baseos hemisphaerii. Liquet autem, utramque zonam ab eodem numero filamentorum fluidi secundum directionem PG incurrentis impelli; & consequenter ictum contra priorem zonam ex Pp ortam ita se habere ad ictum contra zonam alteram genitam ex Gg quemadmodum se habet sinus anguli, sub quo percussio fit contra Pp ad sinum anguli, sub quo pulsatur Gg, seu ad sinum totum: sunt vero sinus horum angulorum uti PG ad CO: ergo impactus obliquus in zonam sphaericam ex Pp ortam est ad impactum directum in zonam circularem ex Gg productam sicuti est PG ad CO. Si nunc accipiatur $PG = y$, $CG = x$, $CO = r$, & ratio diametri ad peripheriam circuli dicatur $1 : \pi$, invenitur zona circularis ex Gg orta $= 2\pi x dx$; haecque quantitas haberi jure potest pro mensura ictus contra zonam ipsam circularem. Ex hoc consequitur, ictum zonae sphaericae ex Pp genitae esse $= \frac{2\pi y x dx}{r}$. Quamobrem integrale istius quantitatis $\frac{2\pi y x dx}{r}$ exprimet ictum contra superficiem sphaericam indefinitam ex rotatione arcus inde-

terminati BP productam. Invenitur porro hujusmodi integrale, si ex proprietate circuli loco y subrogetur ipsius valor $\sqrt{(r^2 - x^2)}$; ex quo fit $\int \frac{2\pi y x dx}{r}$

$$= \int \frac{2\pi x dx \sqrt{(r^2 - x^2)}}{r} = -\frac{2\pi}{3r}\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

$+$ Const.; cumque ictus sit nullus evanescente arcu BP, vel etiam x, eruitur Const. $= \frac{2}{3}\pi r^2$; proindeque impactus contra superficiem sphaericam indeterminatam ex rotatione arcus BP genitam prodit $= \frac{2}{3}\pi r^2$ $- \frac{2\pi}{3r}\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}$. Igitur sumpto pro BP arcu quadrantali BO, vel, quod idem est, r pro x, oritur $\frac{2}{3}\pi r^2 =$ impactui contra superficiem hemisphaericam. Et quoniam impactus contra hemisphaerii basim, seu contra circulum radio CO descriptum exprimitur ab ipsius circuli area $= \pi r^2$, inde efficitur, percussionem hemisphaericae superficiei aequari duabus tertiis partibus percussionis, quam basis excipit.

4. Verum haec, quam dixi percussio, *ex toto* atque integra exercetur contra hemisphaericam superficiem, hujusque *integrae* percussionis pars dumtaxat est impulsio illa, quae in superficie percussa motum conatur imprimere tendentem secundum directionem PG, vel BC fluidi impellentis. Impulsionem hanc alteram

unice spectarunt hactenus tum Geometrae, tum Physici, qui eandem vel ratione, vel experientia quaesivere. Qua in re videtur paullulum hallucinatus vir caetera gnavus & perspicax 's GRAVESANDIUS, qui dum geometrice demonstrat, percussionem hemisphaericae superficiei *integram* duobus trientibus percussionis baseos aequari, in hujus Theorematis confirmationem experimenta profert, quae non ad priorem *integram* percussionem, sed ad alteram *partialem* referuntur, quemadmodum rem diligenter consideranti palam fit (*c*). Ipse quoque Cl. LECCHIUS, vir si quis alius considera tus & sagax, percussionem utramque confundens fidenter pronunciat, percussionem superficiei hemisphaericae ideo GRAVESANDIO obvenisse subsesquialteram percussionis baseos, non autem dimidiam ut BERNOULLIO aliisque, quod in sua demonstratione pro quadrato sinus incidentiae simplicem sinum usurpavit (*d*). Attamen re acrius excussa & enucleata perspicuum fit, ubi superficies duae utcumque inaequales altera oblique, altera perpendiculariter ab eodem filamentorum fluidi incurrentis numero pulsantur, percussionem in superficiem obliquam ad percussionem in superficiem normalem vel esse simpliciter uti est sinus incidentiae ad sinum totum, vel conjunctim uti obliqua superficies ad normalem, & quadratum sinus incidentiae ad quadratum sinus totius: nam haec ratio composita ex ratione superficierum, & ex ratione duplicata sinuum incidentiae in hac hypothesi percussionis ab eodem filamentorum numero factae perfecte congruit cum ratione illa simplici sinuum, cui demonstrationem suam GRAVESANDIUS superstruxit.

(*c*) Vid. *Physicae Elementa Mathematica* Jac. 's GRAVESANDE tom. I. Lib. III. Cap. XV.; sed consulenda editio quarta LUGDUNI BATAVORUM ann. 1748.

(*d*) Vid. *LECCHI Idrostatica esaminata ne' suoi Principj. Parte I. Esame VI.*

5. Porro percussio altera *partialis*, quae Globo motum conatur imprimere secundum directionem B C, vel P G fluidi impellentis, ita ex dictis expedite detegitur: Percussio *tota* in zonam genitam ex conversione minimi arcus P p inventa est $= \frac{2\pi y x dx}{r}$; haecque urget zonam ipsam secundum directionem normalem P C, seu sphaerae radium, ad quam directionem reducta semper concipitur fluidorum pressio quaevis, cum ejus quantitas indagatur, quemadmodum Mechanici norunt. Capiatur P M $= \frac{2\pi y x dx}{r}$, eaque resolvatur in vires duas ad se invicem normales M N, N P. Harum virium prior M N motum globi secundum P G nec adjuvat prorsus, nec impedit, eamque

praeterea elidit vis altera aequalis & oppoſita in ſecundo quadrante BA. Supereſt igitur vis ſola PN, quae globum urget juxta fluidi impellentis directionem. Quum porro ſit

$$PC : PG :: PM : PN$$

$$r : y :: \frac{2\pi yxdx}{r} : PN;$$

oritur vis $PN = \frac{2\pi y^2 xdx}{r^2}$. Hac vi tendit ſecundum PG zona ex Pp orta, & a fluido pulſata, vel eadem vi reſiſtitur juxta PG zonae ipſi fluidum impingenti. Quamobrem ſi integrale accipiatur quantitatis $\frac{2\pi y^2 xdx}{r^2}$, dabit hoc percuſſionem *partialem*, vel reſiſtentiam ſecundum PG ſuperficiei indefinitae ex rotatione arcus BP genitae. Quum vero ſit $y^2 = r^2 - x^2$, invenitur $\int \frac{2\pi y^2 xdx}{r} = \int \frac{2\pi(r^2 - x^2)xdx}{r^2}$ $= \pi x^2 - \frac{\pi x^4}{2r^2}$ ſine ulla Conſtanti ob ſimultaneam tum percuſſionis, tum variabilis x evaneſcentiam. Itaque ſumpta $x = r$, exprimitur a quanto $\frac{1}{2}\pi r^2$ percuſſio vel reſiſtentia *partialis* ſecundum PG exercita contra ſuperficiem totam hemisphaericam, vel ſi mavis contra Globum. Haec igitur reſiſtentia dimidia eſt

ejus, quam ſuſtinet hemisphaerii baſis, ſeu circulus Globi maximus.

6. Inventa per Theoriam relatione inter Globi, & circuli maximi reſiſtentias, videndum nunc quatenus doctorum experimenta Hydraulicorum ad hanc rem capta Theoriae cohaereant vel adverſentur. Ad hujus argumenti illuſtrationem experimenta ſumpſere GRAVESANDIUS (*e*), & Eques De BORDA (*f*).

Reſiſtentia Globi ſe habet ad reſiſtentiam
circuli maximi
Secundum experimenta GRAVESANDII
uti
2 : 3
Secundam Theoriam
uti
2 : 4
Secundum experimenta Equitis De BORDA
uti
2 : 5.

Tanta tamque inſolens experimentorum a binis Viris ſcientiſſimis inſtitutorum diſcrepantia ſcrupulum injicit, machinamentis uſos paullo implicatioribus non po-

(*e*) Loc. cit.

(*f*) Vid. bina hujus excellentis Geometrae *De Reſiſtentia Fluidorum* Opuſcula in *Mem. de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris ann.* 1763. & 1767.

tuiſſe effectum ſatis expurgatum ſincerumque extorquere, indeque germanam & accuratam reſiſtentiae aeſtimationem elicere. Suſpicio invaleſcit, ſi illarum machinarum ſtructura & compages particulatim examinetur, quidve perturbationis ex multiplici impedimentorum genere oriri debeat ſubtiliter expendatur.

7. Ad dirimendam itaque quaeſtionem adhuc fluctuantem incertamque preſto mihi ſe offert uſus Quadrantis Hydrometrici, omnium Hydraulicae inſtrumentorum ſimpliciſſimi ac paratiſſimi. Enimvero ſi in canali recto, cujus aquae curſus ſit ſatis compoſitus & horizontalis, exploretur per corpus aquae innatans certumque ſpatium certo tempore peragrans velocitas ſuperficialis; tumque Quadrantis globus filo ſuſpenſus vix intra aquae ſuperficiem demergatur, & *deviationis* angulus, quem globi filum cum verticali conſtituit, diligenter inſpiciatur, ex cognitis hujus anguli magnitudine, & velocitate aquae ſuperficiali licebit per formulam elegantem, quam mox proponam, veram reſiſtentiae globi menſuram expiſcari.

8. Ut id conſequaris, pone

Semidiametrum globi filo ſuſpenſi . . . . $= r$

Ejus pondus extra aquam . . . . $= p$

Pondus intra aquam . . . . $= q$.

Angulum Deviationis fili globum ſuſtinentis a directione verticali . . . . $= \varphi$

Velocitatem aquae ſuperficialis ſingulis ſecundis, ſeu ſpatium ſingulis ſecundis ab aqua ſuperficiali decurſum . . . . . . $= c$

Spatium, quod grave libere a quiete decidens primo temporis minuto ſecundo tranſcurrit, nimirum ped. paris. $15 \frac{1}{12}$ . . . . $= g$

Ratio diametri ad peripheriam circuli . . $= 1 : \pi$

Jam vero exploratum eſt, impulſum aquae in Quadrantis globum eſſe ad globi pondus intra aquam quemadmodum eſt ſinus ad coſinum *deviationis*; hoc eſt $cos.\ \varphi : ſin.\ \varphi :: q : \frac{q\ ſin.\ \varphi}{cos.\ \varphi}$. Eſt igitur impulſus in globum $= \frac{q\ ſin.\ \varphi}{cos.\ \varphi} = q\ tang.\ \varphi$. Porro experimenta Gallorum §. 1. indicata haud dubie decernunt ac ſanciunt, impulſum aquae in circulum globi maximum ponderi aequipollere talis aqueae calumnae, quae baſim habeat circulo maximo aequalem, altitudinemque parem illi, quae *debita* eſt aquae impellentis celeritati. Quamobrem, quoniam ex motus aequabiliter accelerati Doctrina altitudo *debita* celeritati irruentis aquae invenitur $= \frac{c^2}{4g}$, circulus vero maximus $= \pi r^2$; fit columnae praedictae volumen $= \frac{\pi r^2 c^2}{4g}$. Est autem volumen globi $= \frac{4\pi r^3}{3}$, & paris globi aquei pondus $= p - q$, suntque praeterea materiae homogeneae pondera inter se quemadmodum volumina; habetur iccirco

$$\frac{4\pi r^3}{3} : \frac{\pi r^2 c^2}{4g} :: p - q : \frac{3c^2(p-q)}{16gr}.$$

Ergo columnae pondus, & huic ponderi aequipollens circularis plani aquae incursum perpendiculariter excipientis resistentia oritur $= \frac{3c^2(p-q)}{16gr}$. Dico nunc x numerum exprimentem rationem quaesitam inter resistentiam globi, & resistentiam circuli maximi; habeoque analogiam

$$x : 1 :: q \text{ tang. } \varphi : \frac{3c^2(p-q)}{16gr},$$

unde tandem elicio $x = \frac{16grq \text{ tang. } \varphi}{3c^2(p-q)}$.

9. Cognitis itaque ac sedulo definitis 1° semidiametro globi; 2° ejus pondere tum extra, tum intra aquam; 3° ejusdem *deviatione* a perpendiculo; 4° aquae in recto canali aequabiliter fluentis velocitate superficiali, quod per corpus aquae innatans commode accurateque perficitur; invenitur statim ope superioris formulae sane simplicissimae proportio illa resistentiarum globi, & circuli maximi, quae distractos adhuc sollicitosque habet Hydraulicae coryphaeos. Opportune ad rem nostram diverso licet consilio experientissimus SUECIAE Physicus ELVIUS accuratione Gentis suae propria experimentum cepit, quod si ad formulam nostram exigatur quaesitam proportionem luculenter patefacit (g). Quadranti Hydrometrico globum aptavit osseum, cujus diameter $= 0,17$ ped. Suec., pondus extra aquam $= 2397$ ass., intra aquam $= 987$. Tum in fluviolo cursus aequabilis inventa ope corporis innatantis velocitate aquae superficiali pedum Suec. 2,086 singulis secundis, exploravit angulum *deviationis* globi, superficie tenus demersi, a perpendiculo, huiusque anguli tangentem $= \frac{7}{17}$ reperit. Est igitur

(g) Vid. *Der Königl. Schwedischen Akademie der Wissenschaften Abhandlungen, auf das Jahr* 1741. *Aus dem Schwedischen übersetzt von Abraham Gotthelf* KÄSTNER tom. III., ubi occurrit ELVII Commentariolus inscriptus *Wie die Geschwindigkeit des Wassers zu messen ist, von. P. ELVIUS.*

$2r$	$= 0,\ 17$ *ped. Suec.*
p	$= 2397$ *aſſ.*
q	$= 987$ *aſſ.*
$p - q$	$= 1410$
g	$= 16$ *ped. Suec.*
c	$= 2,\ 086$ *ped. Suec.*
tang. φ	$= \frac{7}{17}$
log. $2r$	$= 0,\ 2304489$
log. 8	$= 0,\ 9030900$
log. q.	$= 2,\ 9943172$
log. g	$= 1,\ 2041200$
log. tang. φ	$= 9,\ 6146491$
log. $16grq$ *tang.* φ	$= 3,\ 9466252$
log. 3	$= 0,\ 4771213$
log. c^2	$= 0,\ 6386286$
log. $(p - q)$	$= 3,\ 1492191$
log. $3c^2\ (p - q)$	$= 4,\ 2649690$
log. $\frac{16grq\ tang.\ \varphi}{3c^2\,(p - q)}$	$= 9,\ 6816562$
$\frac{16grq\ tang.\ \varphi}{3c^2\,(p - q)}$	$= 0,\ 48046$

Habemus igitur $x = 0,\ 48 = \frac{1}{2}$ ſat proxime; unde conſequens fit, reſiſtentiam globi dimidiam eſſe reſiſtentiae circuli maximi; quod quidem quam parum cum experimentis GRAVESANDII, & DE BORDA cohaeret, tam mirifice Theoriae conſonat.

10. Poſtremo quamvis in canali ad rem experiendam electo aquae curſus minime foret horizontalis, ſed horizonti inclinatus, ut plerumque uſuvenit, id tamen experimenti exitum nequaquam turbaret. Dicto enim λ inclinationis angulo, & prioribus retentis denominationibus, ex Mechanicae elementis conſequitur, eſſe actionem aquae in globum ad ejus pondus intra aquam quemadmodum eſt ſinus anguli *deviationis*, ad coſinum ſummae angulorum *deviationis*, & *inclinationis*, ſeu $cos.\ (\varphi + \lambda) : ſin.\ \varphi :: q : \frac{q\ ſin.\ \varphi}{cos.\,(\varphi + \lambda)}$.

Inventa igitur globi reſiſtentia $= \frac{q\ ſin.\ \varphi}{cos.\,(\varphi + \lambda)}$, & circuli maximi reſiſtentia $= \frac{3c^2\,(p - q)}{16gr}$, ſi fiat, ut prius, $x : 1 :: \frac{q\ \text{ſin.}\ \varphi}{\text{cos.}(\varphi+\lambda)} : \frac{3c^2(p-q)}{16gr}$, colligitur

$$x = \frac{16grq\ \text{ſin.}\ \varphi}{3c^2(p-q)\,\text{cos.}(\varphi+\lambda)}$$; quod quaeſitam proportionem reſiſtentiarum globi, & circuli maximi in aperto ponit.

DISQUISITIO XV.

DE HORA CALORIS MAXIMI INTRA DIEM, DEQUE DIE CALORIS MAXIMI INTRA ANNUM.

1. IN prima Diſquiſitione indicavimus quid Geometrae nominis celebritate clariſſimi HALLEJUS, & SIMPSONIUS in tractando Problemate de Caloris Solaris menſura pro viribus praeſtiterint, & quam quiſque symbolam ad illius enodationem contulerit. Sed praeter inclyta ab illis elucubrata, & memoriae litterarum conſignata opuſcula, MAIRANUS rerum phyſicarum ſpeculator ingenioſus & induſtrius de hoc ipſo argumento ſemel, iterum, ac tertio diſſeruit eleganter more ſuo ac copioſe in Actis Pariſienſis Scientiarum Academiae, ubi rem phyſicae tantum indagini ſubjeciſſe contentus, Phyſicumque agens, non Phyſico-Mathematicum ab analyticis calculis vel conſulto abſtinuit, vel in illos vix ſe inſinuavit (*a*). Horum Virorum conatibus acceſſit clariſſimi Batavi Philoſophi Johannis Lu-

(a) *Mém. de l' Acad. des Sciences de Paris ann.* 1719., 1721., 1765.

LOFII industria, cujus elaboratum Opus Batavico idiomate exaratum, & a celeberrimo KÄSTNERO germanice versum & auctum, id est *Introductio ad Mathematicam & Physicam Telluris Cognitionem*, Part. II. Cap. VI. multa & varia de hoc argumento complectitur cum ingeniose disputata, tum inventa subtiliter, quae & Physici curiositatem explere possunt, & Mathematici religioni satisfacere (*b*). KÄSTNERUS ipse plura hac de re habet cum in adnotationibus ad eum locum Operis Lulofiani, tum potissimum in *Miscellaneis Hamburgicis* (*c*), ubi perspicuitate sibi adeo familiari omnia huc spectantia exponit & ad trutinam expendit. Novissime Upsaliensis Astronomus Fridericus MALLETUS in exquisita opella *De Generali, seu Mathematica Telluris Descriptione* (*e*) elegantissimam protulit hujus Problematis solutionem tum in hypothesi

(*b*) Johann LULOFS Einleitung zu der mathematischen und physikalischen Kenntniss der Erdkugel aus dem Holländischen übersetzet von Abraham Gotthelf KÄSTNER, GÖTTINGEN und LEIPZIG 1755. in 4.° §. 575.

(*c*) HAMBURG. Magaz. II. Buch 4. St., und VIII. Buch 6. St. 5. Art. 613. St.

(*e*) Allgemeine oder Mathematische Beschreibung der Erdkugel, auf Veranlassung der Cosmographischen Gesellschaft verfasset von Friedrich MALLET, aus dem Schwedischen übersetzt von LAMPERT Hinrich RÖHL, GREIFSWALD 1774. §. 62.

caloris aucti in ratione simplici sinus incidentiae, tum in hypothesi altera rationis illius duplicatae; sed rem delibasse contentus, & *caloris comparationem in reliquis terrestribus latitudinibus praeterquam sub Æquatore, & Polo* (ut ipse ait) *eruere se posse* desperans investigationem vix inchoatam abrupit.

Mirum porro fuisset ac prorsus insolens, si tot tantarumque rerum vel inventor, vel illustrator EULERUS, qui nullam Matheseos partem, quam immensa est, non excoluit, nullamque excoluit, quam non ditaverit vel perfecerit (*g*), quaestionem nobilissimam tantoque dignam Geometra silentio praeteriisset; neque sane praeteriit, nam in Actis veteribus Petropolitanae Academiae (*h*) ad rem aggressus summa, qua semper solet, sagacitate in altissimam se conjiciens analysim solutionem Problematis dedit si minus commodam & elegantem, exquisitam certe & acutissimam.

2. Verum horum praecellentium Hominum nemo cogitavit de Problemate altero cognato & affini, utilitatisque plurimum & subtilitatis habente, quo definienda proponitur hora diei, in qua aestivus solis ca-

(*g*) Ita de EULERO vere candideque pronunciat Geometra alius acerrimi ingenii CONDORCETUS tom. III. *Supplément à l'Enciclopédie* art. *Indéterminés*.

(*h*) *Comment. Acad. Petrop.* tom. XI.

lor maxime intenditur, tumque porro anni tempus aut dies, in quo prae caeteris omnibus diebus aer maxime incalescit. Equidem intelligo, Eulerianas formulas rite tractatas per implexas supputationum inextricabilium ambages huc quoque pertingere; at homo modestissimus non dubitat affirmare, *formulae istae tantopere sunt compositae & perplexae, ut ex iis vix quicquam concludi queat*. Ad eas autem tractabiliores efficiendas & ad usum magis idoneas cogitur Vir summus hypotheses admittere a veritate rerumque natura abhorrentes: *quamobrem* (subdit ille) *ut aliquid ad utilitatem derivare queamus, necesse est aliquantum a veri similitudine recedere*. Inde vero ad praeposteram conclusionem perductus, quod sane erat a minus vera hypothesi expectandum, sine latebris & circuitu verborum rotunde concludit, *maximus ergo calor meridianus, pariter ac maximum frigus incident post solstitia; at discrimen ne unicum quidem diem adaequat, ita ut satis tuto ipsa solstitia pro momentis, in quibus calor meridianus tum sit maximus, tum minimus haberi queant. Quod si cum observationibus minus congruat, id hypothesi a veritate nimium aberranti est tribuendum*. Haec ille, cui de accurata & perfecta Problematis solutione desperanti, deque frustra tentata omnium analyseos artificiorum applicatione pro-

nuncianti nemo non eandem fidem adhibeat, quam ARCHIMEDI HIERON adhiberi jussit.

3. Quam ob rem in hac Quaestionis vel intractatae novitate, vel vix delibatae implicatione & incertitudine aliquid conari viresque meas experiri volui, *nec cum fiducia inveniendi*, ut ait *SENECA* (*i*), *nec sine spe*. Quum autem casu certe magis quam ingenio in formulas inciderim valde concinnas & phaenomenis mirifice consentaneas statui rem omnem publici juris facere & doctorum judicio permittere. Eam itaque primum Problematis partem persequar, qua definienda venit in aestivo quolibet die hora aestus Solaris maximi, partem alteram deinde aggressurus ubi dies quaeritur aestivus calori omnium maximo respondens.

P A R S I.

4. IN triangulo sphaerico ZPS sit S Sol, P Polus Z Zenit, & accipiatur loci latitudo $= \lambda$, Solis declinatio $= \delta$, & ejus elevatio supra horizontem $= \varepsilon$. Erit igitur, ut in I. Disquisitione Tab. I. Fig. 1.

(*i*) *SENECA Quaest. Nat.* Lib. VII. Cap. 29.

$$\textit{sin.}\ PZ = \textit{cos. lat.} = \textit{cos.}\ \lambda$$
$$\textit{sin.}\ PS = \textit{cos. decl.} = \textit{cos.}\ \delta$$
$$\textit{cos.}\ PZ = \textit{sin. lat.} = \textit{sin.}\ \lambda$$
$$\textit{cos.}\ PS = \textit{sin. decl.} = \textit{sin.}\ \delta$$
$$\textit{cos.}\ ZS = \textit{sin. elev.} = \textit{sin.}\ \varepsilon$$

Vulgatissimum autem Sphaericae Trigonomatriae Theorema sequentem aequalitatem dat

$\textit{cos.}\ ZS = \textit{sin.}\, PZ\ \textit{sin.}\ PS\ \textit{cos.}\ P + \textit{cos.}\, PZ\ \textit{cos.}\, PS$, hoc est facto angulo horario P, vel $SPZ = h$,

$$\textit{sin.}\ \varepsilon = \textit{cos.}\ \lambda\ \textit{cos.}\ \delta\ \textit{cos.}\ h + \textit{sin.}\ \lambda\, \textit{sin.}\ \delta.$$

5. Jamvero aestus Solaris intensio eam primum rationem sequitur, quae sinui altitudinis Solis supra horizontem directe respondet, veluti in I. Disquisitione firmavimus (*l*). Praeterea major etiam fit Solis

Calor, quo longior est illius supra horizontem mora; augetur videlicet Calor in ratione simplici directa temporis, quo Sol ab horizonte ad datam altitudinem ascendit: nam quamvis MAIRANUS exemplo gravium libere decidentium & sursum verticaliter projectorum rationem temporis hujusmodi duplicatam ratione simplici potiorem habuerit, hanc tamen consecutionem intulit ex hypothesi minus vera, quandoquidem Calorem Solis non secus in aere ac tellure conservari posuit atque velocitas in gravibus descendentibus conservatur, quae scilicet semel impressa nunquam amittitur (*m*).

(*l*) Adversus eos, qui loco sinus altitudinis ejus quadratum usurpant, apodictice argumentatur Vir summus LAMBERTUS in *Pyrometria* §. 651. *Das Quadrat*, inquit, *des Sinus der Sonnenhöhe hat hier keine Bedeutung. Es kömmt bloss auf die Menge und Dichtigkeit der Sonnenstralen, nicht aber auf den Stos gegen eine ebene Fläche an. Nicht die Feuertheilchen so aufstossen und daher nothwendig wieder zurückprallen, sondern die, welche nicht an der Fläche aufstossen, sondern in den zu erwarmenden Körper hineingehen, vermehren die Anzahl der Feuertheilchen oder die Wärme desselben. Dieses ist der Grund, warum schwarze Körper an der Sonne wärmer werden als weisse.* Quae verba latine reddita sic sonant: *Quadratum sinus altitudinis Solaris nullum hic sibi locum vindicat. In numero tantum & densitate radiorum solarium, minime vero in illorum percussione vel ictu mechanico contra planum totius rei cardo vertitur. Ignearum corporis molecularum numerus, hoc est calor ipsius non augetur ab illis igneis particulis, quae in corporis superficiem impingunt, indeque necessario reflectuntur, sed ab iis tantum, quae superficiem praetereuntes intra corporis meatus se insinuant. Haecque caussa est cur nigra corpora Soli objecta vehementius quam alba incalescant.*

(*m*) Praestat MAIRANUM ipsum diserte more suo & acute hac de re disputantem audire, quam inaudita caussa refellere. *La raison* (inquit ille) *& l'expérience concourent à prouver que la chaleur imprimée à l'air & au terrain du climat, dans un jour & à une heure quelconques, y deviendra d'autant plus grande, que le Soleil aura plus long-temps séjourné auparavant sur l'horizon. La chaleur du jour Solstical, le plus long de tous & précédé*

6. Augetur itaque Solis aestus dato quolibet die

des plus longs jours, dont il participe, sera donc par-là une des principales causes de la supériorité de l' Eté sur l' Hiver. C' est une série croissante depuis le Solstice d' Hiver jusqu' à celui d' Eté, & décroissante depuis le Solstice d' Eté jusqu' à celui d' Hiver. Nous pouvons du moin la considérer sous cet aspect; car quoique le maximum *& le* minimum *n' en soient pas toujours à la même place, qu' ils dûssent, en général, se trouver plus ou moins au-delà des Solstices, & que la marche de la progression, abstraction faite des causes accidentelles, en dût devenir constante de l' un à l' autre terme par succession des temps, nous ne laisserons pas de supposer ici le jour Solsticial le plus chaud de tous, par lui-même en raison de l' arc diurne ou semi-diurne proportionnel à sa durée, & de plus comme précédé des jours les plus chauds; & ainsi de suite à l' égard de ceux-ci jusqu' au* minimum. *D' ou` naîtra une progression semblable à celle de la force croissante ou décroissante des corps qui descendent ou qui montent, par l' accélération, ou par le retardement du mouvement, & que j' évaluerai aussi de même par les quarrés des temps. Ainsi, par exemple, l' arc semi-diurne du jour Solsticial d' Eté à Paris, étant à peu-près double de l' arc semi-diurne du jour Solsticial d' Hiver, j' en conclurai l' expréssion de cet Elément à peu-pres en raison de 4. à 1., pour les deux Solstices, & ainsi de tous les autres climats, relativement à leurs latitudes & à l' arc semi-diurne qui y répond.*

Sans l' effet rétroactif de cette puissante cause, il feroit plus de froid, du moins dans notre hémisphère, au lever & au coucher du Soleil en Eté & le jour même du Solstice, que dans le plus fort de l' Hiver, & réciproquement plus de chaud au lever & au coucher du Soleil en Hiver qu' en Eté; puisque tout le reste demeurant égal ou nul de part & d' autre, & abstraction faite de la chaleur imprimée les jours précédens, la distance du Soleil à la Terre est plus grande en Eté qu' en Hiver d' environ un million de lieues. D' où il suit, que le calcul de notre Eté & de notre Hiver, seroit défectueux, si nous ne faisions résulter ce quatrième Elément que du simple arc semi-diurne. Mem. de l' Acad. des Sciences de Paris pour l' année 1765. Ecquis vero MAIRANO concedat, (quod ratiocinationis suae fundamentum est) solstitialem diem esse omnium aestivorum calidissimum? Ecquis det, caloris incrementa progressionem constituere illi similem, quam incrementa velocitatis in gravibus libere decidentibus componunt? Ecquis denique MAIRANO assentiatur, conservari calorem in corporibus perinde ac velocitas lapsu acquisita conservatur, quam scilicet semel adeptam labentia corpora sublatis obstaculis continenter tuentur? Quam parum haec cum severioribus Physicorum dictatis cohaereant, nemo est qui non sentiat. Hac fortasse de caussa Philosophus elegantissimus perpetuusque MAIRANI admirator BAILLY caloris aestimationem exponens, & elementum illud exagitans, quod a tempore vel arcu semidiurno constituitur, dum officiosis verbis duci blanditur suo, re descisit ab ipso, & repudiato arcus semidiurni quadrato simplicem arcum usurpat. Vid. BAILLY *Lettres sur l' Origine des Sciences* Lett. IX.

ut sinus altitudinis, & ut tempus conjunctim, hoc est uti factum ex sinu altitudinis Solis in tempus, quod elabitur dum Sol ab horizonte ad altitudinem illam pertingit. Quum vero aestus *maximus*, quem hic unice spectamus, nequeat in momentum ullum antemeridianum incidere, ut per ſe patet (n), proportionalis iccirco caloris quantitas pro momento quovis pomeridiano invenietur, ſi ducatur altitudo Solis pomeridiana in arcum vel angulum ſemidiurnum diei propoſitae auctum angulo horario poſt meridiem. Dicatur itaque a angulus vel arcus ſemidiurnus, ſitque SPZ, vel h horarius angulus poſt meridiem; erit $a + h$ menſura temporis ab ortu ſolis ad momentum illud uſque pomeridianum. Quapropter caloris intenſio proportionalis erit analyticae expreſſioni $(a + h)\ \mathit{ſin.}\ \varepsilon$, ſive ob aequalitatem antea conſtitutam

$$\mathit{ſin.}\ \varepsilon = \cos.\ \lambda \cos.\ \delta \cos.\ h + \mathit{ſin.}\ \lambda\ \mathit{ſin.}\ \delta,$$

caloris relativi formula pro momento quovis pomeridiano diei cujuſcumque haec habebitur

$$(a + h)(\cos.\ \lambda \cos.\ \delta \cos.\ h + \mathit{ſin.}\ \lambda\ \mathit{ſin.}\ \delta)$$
$$= a \cos.\lambda \cos.\ \delta \cos.h + a\ \mathit{ſin.}\ \lambda\ \mathit{ſin.}\ \delta + h \cos.\ \lambda \times \cos.\ \delta \cos.\ h + h\ \mathit{ſin.}\ \lambda\ \mathit{ſin.}\ \delta.$$

Igitur hujus formulae differentiale, accepta h variabili, inventum, & nihilo aequatum functionem ipſius

(n) Ex vulgatiſſima Inertiae lege fit, ut qui a continenti cauſſae alicujus actione gignitur effectus, maximus non evadat niſi ſat diu poſt momentum illud, quo maxima eſt cauſſae actio: tunc enim ſolummodo effectus exiſtit omnium maximus, cum decrementum ab imminuta cauſſae actione profectum proxime par eſt incremento, quod ipſe capit ex actione continuata.

h praebebit, quae pomeridianum aeſtus maximi momentum patefaciet. Propterea erit

$$- a\,dh\ \mathit{ſin.}\ h \cos.\ \lambda \cos.\ \delta + dh \cos.h \cos.\ \lambda \cos.\ \delta$$
$$- h\,dh\ \mathit{ſin.}\ h \cos.\ \lambda \cos.\ \delta + dh\ \mathit{ſin.}\ \lambda\ \mathit{ſin.}\delta = 0,\ \text{vel}$$

$$(M) \qquad \cos.h - a\ \mathit{ſin.}\ h - h\ \mathit{ſin.}\ h + \frac{\mathit{ſin.}\ \lambda\ \mathit{ſin.}\ \delta}{\cos.\lambda \cos.\delta} = 0.$$

7. Ut modo ex hac aequatione tranſcendenti quaeſitam eliciam quantitatis h menſuram, experior primo Analyſtis familiariſſimam ſerierum reverſionem.

Ex functionum circularium doctrina conſtat, eſſe

$$\cos.\ h = 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{2.3.4} - \&c.$$

$$\mathit{ſin.}\ h = h - \frac{h^3}{2.3} + \frac{h^5}{2.3.4.5} - \&c.$$

Hiſce valoribus in aequatione (M) ſubrogatis oritur

$$1 - ah - \frac{3}{2}h^2 + \frac{a}{6}h^3 + \frac{5}{24}h^4 \ldots + \frac{\mathit{ſin.}\ \lambda\ \mathit{ſin.}\ \delta}{\cos\ \lambda \cos.\ \delta} = 0;$$

deinde diviſione per $-a$ inſtituta prodit infinita aequatio

$$h + \frac{3}{2a}h^2 - \frac{1}{6}h^3 - \frac{5}{24a}h^4 \ldots - \frac{\mathit{ſin.}\lambda\ \mathit{ſin.}\delta + \cos.\lambda \cos.\delta}{a \cos.\ \lambda \cos.\ \delta} = 0,\ \text{ſeu}$$

$$h + \frac{3}{2a}h^2 - \frac{1}{6}h^3 - \frac{5}{24a}h^4 \ldots\ldots - r = 0,$$

posito videlicet $r = \frac{sin.\lambda\ sin.\delta + cos.\lambda\ cos.\delta}{a\ cos.\lambda\ cos.\delta}$.

8. Pergo modo, assumoque

$$h = Ar + Br^2 + Cr^3 + Dr^4 + \&c.$$

$$+\frac{3}{2a}h^2 = +\frac{3}{2a}A^2r^2 + \frac{3}{a}ABr^3 + \frac{3}{2a}B^2r^4 + \frac{3}{a}ACr^4$$

$$-\frac{1}{6}h^3 = -\frac{1}{6}A^3r^3 - \frac{1}{2}A^2Br^4$$

$$-\frac{5}{24a}h^4 = -\frac{5}{24a}A^4r^4$$

$$-r = -r$$

Ex comparatione coefficientium indeterminatorum sequentes oriuntur aequalitates

$$Ar - r = 0$$

$$Br^2 + \frac{3}{2a}A^2r^2 = 0$$

$$Cr^3 + \frac{3}{a}ABr^3 - \frac{1}{6}A^3r^3 = 0$$

$$Dr^4 + \frac{3}{2a}B^2r^4 - \frac{1}{2}A^2Br^4 + \frac{3}{a}ACr^4 - \frac{5}{24a}A^4r^4 = 0.$$

Inde vero isti prodeunt coefficientium valores

$$A = 1$$

$$B = -\frac{3}{2a}$$

$$C = \frac{1}{6} + \frac{9}{2a^2}$$

$$D = -\frac{25}{24a} - \frac{135}{8a^3}.$$

Igitur

$$h = r - \frac{3}{2a}r^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{9}{2a^2}\right)r^3$$

$$-\left(\frac{25}{24a} + \frac{135}{8a^3}\right)r^4 \ \&c.$$

9. Pergo porro, & numericam temporis h mensuram hinc conor elicere ad hunc modum.

TICINI REGII diebus aestivis solstitialibus tempus semidiurnum, sive ab ortu Solis usque ad meridiem invenitur $= 7^h.\ 56^m.$, quod in arcum semidiurnum aequatoris conversum praebet arcum ipsum $= 2,077$, quum tota peripheria, quae horis 24. respondet, sit $= 6,283$ ex nota diametri ad circumferentiam ratione. Quare

a	$= 2,077$
λ	$= 45^{\circ}\ 11'$
δ	$= 23^{\circ}\ 28'$
$\log.\ \sin.\ \lambda$	$= 9,8508702$
$\log.\ \sin.\ \delta$	$= 9,6001181$
$\log.\ \sin.\ \lambda\ \sin.\ \delta$	$= 9,4509883$
$\sin.\ \lambda\ \sin.\ \delta$	$= 0,2825$
$\log.\ \cos.\ \lambda$	$= 9,8480909$
$\log.\ \cos.\ \delta$	$= 9,9625076$
$\log.\ \cos.\ \lambda\ \cos.\ \delta$	$= 9,8105985$
$\cos.\ \lambda\ \cos.\ \delta$	$= 0,6465$
$\sin.\ \lambda\ \sin.\ \delta + \cos.\ \lambda\ \cos.\ \delta$ . .	$= 0,9290$
$\log.\ a$	$= 0,3174116$
$\log.\ a\ \cos.\ \lambda\ \cos.\ \delta$	$= 0,1280101$
$\log.\ (\sin.\ \lambda\ \sin.\ \delta + \cos.\ \lambda\ \cos.\ \delta)$	$= 9,9680157$
$\log.\ \dfrac{\sin.\lambda\ \sin.\delta + \cos.\lambda\ \cos.\delta}{a\ \cos.\lambda\ \cos.\delta} = \log. r$	$= 9,8400056$
r	$= 0,6918$
$\log.\ r^2$	$= 9,6800112$
$\log.\ 3$	$= 0,4771213$

$\log.\ 3r^2$	$= 0,1571325$
$\log.\ 2$	$= 0,3010300$
$\log.\ a$	$= 0,3174116$
$\log.\ 2a$	$= 0,6184416$
$\log.\ \dfrac{3r^2}{2a}$	$= 9,5386909$
$-\dfrac{3r^2}{2a}$	$= -0,3457$
$\log.\ a^2$	$= 0,6348232$
$\log.\ 2$	$= 0,3010300$
$\log.\ 2a^2$	$= 0,9358532$
$\log.\ 9$	$= 0,9542426$
$\log.\ \dfrac{9}{2a^2}$	$= 0,0183894$
$\dfrac{9}{2a^2}$	$= 1,043$
$\dfrac{1}{6}$	$= 0,167$
$\dfrac{1}{6} + \dfrac{9}{2a^2}$	$= 1,210$

$$\log.\left(\frac{1}{6}+\frac{9}{2a^2}\right) \dots\dots = 0,\,0827854$$

$$\log.\ r^3 \dots\dots\dots = 9,\,5200168$$

$$\log.\left(\frac{1}{6}+\frac{9}{2a^2}\right)r^3 \dots\dots = 9,\,6028022$$

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{9}{2a^2}\right)r^3 \dots\dots = 0,\,4007$$

$$\log.\ 25 \dots\dots\dots = 1,\,3979400$$

$$\log.\ 24 \dots\dots\dots = 1,\,3802112$$

$$\log.\ a \dots\dots\dots = 0,\,3174116$$

$$\log.\ 24\,a \dots\dots\dots = 1,\,6976228$$

$$\log.\ \frac{25}{24a} \dots\dots\dots = 9,\,7003172$$

$$\frac{25}{24\,a} \dots\dots\dots = 0,\,5016$$

$$\log.\ 135 \dots\dots\dots = 2,\,1303338$$

$$\log.\ (2a)^3 = \log.\ 8a^3 \dots = 1,\,8553248$$

$$\log.\ \frac{135}{8\,a^3} \dots\dots\dots = 0,\,2750090$$

$$\frac{135}{8\,a^3} \dots\dots\dots = 1,\,884$$

$$\frac{25}{24\,a}+\frac{135}{8\,a^3} \dots\dots\dots = 2,\,3856$$

$$\log.\left(\frac{25}{24\,a}+\frac{135}{8\,a^3}\right) \dots\dots = 0,\,3775976$$

$$\log.\ r^4 \dots\dots\dots = 9,\,3600224$$

$$\log.\left(\frac{25}{24\,a}+\frac{135}{8\,a^3}\right)r^4 \dots = 9,\,7376200$$

$$-\left(\frac{25}{24\,a}+\frac{135}{8\,a^3}\right)r^4 \dots = -0,\,5465$$

Si valores nunc eruti in praecedenti aequatione ſubrogentur, deprehenditur

$h = 0,\,6918 - 0,\,3457 - 0,\,4007 - 0,\,5465$ &c. Quum autem ſeries haec manifeſto divergens ſit, nihilque proinde nos doceat, alia via in radicem aequationis tranſcendentis (M) inquirendum eſt.

10. Itaque per falſas poſitiones vadum tento; & pono primum $h = 30^\circ = 0,\,524$. Hinc derivatur

$$\cos.\ h \dots\dots\dots = 0,\,8660$$

$$\log.\ a \dots\dots\dots = 0,\,3174116$$

$$\log.\ \mathit{ſin}.\ h \dots\dots\dots = 9,\,6989700$$

$$og.\ a\ \mathit{ſin}.\ h \dots\dots\dots = 0,\,0163816$$

$$-\ a\ \mathit{ſin}.\ h \dots\dots\dots = -1,\,038$$

$$\log.\ h \dots\dots\dots = 9,\,7193313$$

$\log. h \sin. h \ldots\ldots = 9,4183013$

$-h \sin. h \ldots\ldots = -0,2620$

$\log. \sin. \lambda \sin. \delta \ldots\ldots = 9,4509883$

$\log. \cos. \lambda \cos. \delta \ldots\ldots = 9,8105985$

$\log. \dfrac{\sin. \lambda \sin. \delta}{\cos. \lambda \cos. \delta} \ldots\ldots = 9,6403898$

$\dfrac{\sin. \lambda \sin. \delta}{\cos. \lambda \cos. \delta} \ldots\ldots = 0,4369$

Igitur aequatio (M) fit
$0,8660 - 1,038 - 0,2620 + 0,4369 = 0,0029$
adeoque error exceſſivus $= 0,0029$

11. Sumo ſecundo $h = 45^\circ = 0,785$; & conſequor

$\cos. h \ldots\ldots = 0,7071$

$\log. \sin. h \ldots\ldots = 9,8494850$

$\log. a \ldots\ldots = 0,3174116$

$\log. a \sin. h \ldots\ldots = 0,1668966$

$-a \sin. h \ldots\ldots = -1,469$

$\log. h \ldots\ldots = 9,8948697$

$\log. h \sin. h \ldots\ldots = 9,7443547$

$-h \sin. h \ldots\ldots = -0,5551$

$\dfrac{\sin. \lambda \sin. \delta}{\cos. \lambda \cos. \delta} \ldots\ldots = 0,4369$

Ex hoc oritur aequatio (M)
$0,7071 - 1,469 - 0,5551 + 0,4369 = -0,8801$;
ubi error defectivus $= -0,8801$.

12. Quamobrem habebitur

Poſit. I. $h = 30^\circ = 0,524$

Err. I. $= +0,0029$

Poſit. II. $h = 45^\circ = 0,785$

Err. II. $= -0,8801$

Fiat jam uti Errorum ſumma ad Poſitionum differentiam ita Error minimus ad quartum proportionalem, ſeu
$0,8830 : 15^\circ :: 0,0029 : 0,04926^\circ = 3'$ circiter.

Quartus hic proportionalis additus primae Poſitioni efficit $h = 30^\circ 3' = 0,5245$; habeoque

$\cos. h \ldots\ldots = 0,8656$

$\log. a \ldots\ldots = 0,3174116$

$\log. \sin. h \ldots\ldots = 9,6996258$

$\log. a \sin. h \ldots\ldots = 0,0170374$

$-a \sin. h \ldots\ldots = -1,040$

$\log. h \ldots\ldots = 9,7197190$

$\log. h \sin. h \ldots\ldots = 9,4193448$

$$-h\ \mathit{sin}.\ h \quad \ldots\ldots\ldots = -0,2626$$

$$\frac{\mathit{sin}.\lambda\ \mathit{sin}.\delta}{\mathit{cos}.\lambda\ \mathit{cos}.\delta} \quad \ldots\ldots\ldots = 0,4369$$

Proinde aequatio tranſcendens (M) abit in

$$0,8656 - 1,040 - 0,2626 + 0,4369 = -0,0001.$$

Defectivus Error ex hac Poſitione ortus evadit

$-0,0001$.

13. Propterea fit

Poſit. I. $h = 30^{\circ} = 0,524$

Err. I. $= +0,0029$

Poſit. III. $h = 30^{\circ}.3' = 0,5245$

Err. III. $= -0,0001$

Inſtituatur rurſus analogia, quemadmodum eſt ſumma Errorum ad differentiam Poſitionum, ita Error minimus ad quartum, hoc eſt

$$0,003 : 3' :: 0,0001 : 0,1' = 6''.$$

Si quartus hic proportionalis $6''$ a tertia Poſitione $30^{\circ}.3'$ auferatur, invenitur ipſius h valor ſumme appropinquans nempe $h = 30^{\circ}.3' - 6'' = 30^{\circ}.2'.54''$.

14. Facta modo anguli hujus horarii converſione in tempus prodeunt horae duae, & minuta ſecunda duodecim paullo minus poſt meridiem. Nemo autem ignorat, in noſtris hiſce regionibus ſolſtitialibus diebus aeſtum Solis maximum duabus circiter poſt meridiem horis ſaevire. Profecto tam admirabilis tamque inſperatus aequationis noſtrae cum veritate rerumque natura conſenſus aperte docet quanta ſit in res phyſicas etiam abſtruſiores ſubtilioreſque Analyſeos rite adminiſtratae poteſtas & imperium.

PARS II.

15. DEfinienda nunc ſupereſt aeſtiva dies, qua Solis calor maximum acquirit incrementum. Ratum habeo pluriumque illuſtrium Phyſicorum ſuffragio firmatum, calorem Solis die quovis aeſtivo ingruentem, cum calore diei cujuſvis alterius comparatum rationem ſequi compoſitam ex ratione directa ſimplici arcuum ſemidiurnorum, & ſinuum altitudinum Solis meridianarum, & ex duplicata inverſa diſtantiarum Solis a Terra, ita ut relativi caloris menſura aeſtivo quolibet die exprimatur per factum ex arcu ſemidiurno in ſinum altitudinis Solis meridianae diviſum per quadratum diſtantiae Solis a Terra in eodem die. Quum autem maximus Solis calor, in quem inquirimus, neque ante Solſtitium aeſtivum, ut palam eſt, neque poſt Æquinoctium autumnale incidere poſſit, & diſtantiae Solis

a Terra in hoc temporis intervallo mutabiles tam parum a se differant (m), ut caloris inde profecta variatio negligi tuto queat, quippe quae, ubi maxima sit, ad tres partes centesimas caloris solstitialis non pertingit; propterea in indicata caloris formula contempto denominatore, seu distantiae quadrato numerator superstes caloris diurni vim sufficienti accuratione repraesentabit.

16. Si itaque altitudo Solis meridiana dato quolibet aestivo die dicatur A, arcus semidiurnus tunc temporis vocetur P, exponet formula $P \sin. A$ calorem illius diei relativum. Constat porro ex Astronomiae rudimentis in Hemisphaerio nostro Boreali aestivo tempore altitudinem Solis meridianam complementum esse arcus, qui metitur differentiam latitudinis loci & declinationis, ita nimirum ut sit $A + \lambda - \delta = 90°$. Inde fiet $\sin. A = \cos. (\lambda - \delta)$, & formula $P \sin. A$ abibit in aliam

$$P \cos. (\lambda - \delta) = P \cos. \lambda \cos. \delta + P \sin. \lambda \sin. \delta.$$

In hac hypothesi caloris maximi accipiendum est formulae istius differentiale, & nihilo aequandum; sed oportet prius duarum variabilium P, & δ alterutram eliminare. Ad hanc rem subsidium peto ab aequatione superius (*Part. I.*) constituta

$$\sin. \varepsilon = \cos. \lambda \cos. \delta \cos. h + \sin. \lambda \sin. \delta,$$

in qua si horarius angulus h pertingere sumatur a meridie ad horizontem, evadit $h = P$, seu arcui semidiurno, & $\varepsilon = 0$; adeoque aequatio fit $0 = \cos. \lambda \times \cos. \delta \cos. P + \sin. \lambda \sin. \delta$, & $\cos. \lambda \cos. \delta = -\frac{\sin. \lambda \sin \delta.}{\cos. P}$

Hoc valore in caloris formula $P(\cos. \lambda \cos. \delta + \sin. \lambda \sin. \delta)$ subrogato oritur $P \left(\sin. \lambda \sin. \delta - \frac{\sin. \lambda \sin. \delta}{\cos. P} \right)$

$$= \frac{P \sin. \lambda \sin. \delta}{\cos. P} (\cos. P - 1);$$

17. Ut nunc inveniatur valor $\sin. \delta$ expressus per functionem ipsius P, quadretur aequatio $\cos. \lambda . \cos. \delta = -\frac{\sin. \lambda \sin. \delta}{\cos. P}$, unde eruitur $\cos.^2 \lambda (1 - \sin.^2 \delta) = \frac{\sin.^2 \lambda \sin.^2 \delta}{\cos.^2 P}$, &

$$\sin.^2 \delta = \frac{\cos.^2 \lambda \cos.^2 P}{\sin.^2 \lambda + \cos.^2 \lambda \cos.^2 P};$$ eductaque radice

$$\sin. \delta = \frac{\cos. \lambda \cos. P}{\sqrt{(\sin.^2 \lambda + \cos.^2 \lambda \cos.^2 P)}}.$$ Hunc valorem substituo in superiori formula $\frac{P \sin. \lambda \sin. \delta}{\cos. P} (\cos. P - 1)$,

(m) Vid. excellens Opus inscriptum: *Recueil de Tables Astronomiques, publié sous la direction de l'Académie Royale des Sciences & Belles Lettres de Prusse. Berlin* 1776, pag. 259. Vol. I.

& habeo $\frac{P\ \text{ſin.}\,\lambda\ \text{cos.}\,\lambda\ (\text{cos.}\,P - 1)}{\sqrt{(\text{ſin.}^2\lambda + \text{cos.}^2\lambda\ \text{cos.}^2 P)}}$ aeſtus Solaris menſuram pro dato quolibet aeſtatis die. In hac poſtrema formula una tantum reperitur quantitas variabilis, nimirum P, quae in Boreali Hemiſphaerio aeſtivo tempore nonaginta gradus ſemper excedit, ideoque differentiale ipſius *cos.* P, quod ſecus foret negativum, in affirmativum vertitur. Hac itaque cautione ſumpto ejuſdem formulae differentiali invenio

$$\Big[(dP\ \text{cos.}\,P\ \text{ſin.}\,\lambda\ \text{cos.}\,\lambda + P\,dP\ \text{ſin.}\,P\ \text{ſin.}\,\lambda\ \text{cos.}\,\lambda)$$

$$\sqrt{(\text{ſin.}^2\lambda + \text{cos.}^2\lambda\ \text{cos.}^2 P)} - \frac{P\,dP\ \text{ſin.}\,P\ \text{cos.}^2 P\ \text{ſin.}\,\lambda\ \text{cos.}^3\lambda}{\sqrt{(\text{ſin.}^2\lambda + \text{cos.}^2\lambda\ \text{cos.}^2 P)}}$$

$$- dP\ \text{ſin.}\,\lambda\ \text{cos.}\,\lambda \sqrt{(\text{ſin.}^2\lambda + \text{cos.}^2\lambda\ \text{cos.}^2 P)}$$

$$+ \frac{P\,dP\ \text{ſin.}\,P\ \text{cos.}\,P\ \text{ſin.}\,\lambda\ \text{cos.}^3\lambda}{\sqrt{(\text{ſin.}^2\lambda + \text{cos.}^2\lambda\ \text{cos.}^2 P)}}\Big] : (\text{ſin.}^2\lambda + \text{cos.}^2\lambda\ \text{cos.}^2 P) = 0,$$

& factis idoneis reductionibus tandem conſequor equationem (*N*)

$$P\ \text{ſin.}\,P\ \text{cos.}\,\lambda\ \text{ſin.}^3\lambda + P\ \text{ſin.}\,P\ \text{cos.}\,P\ \text{ſin.}\,\lambda\ \text{cos.}^3\lambda$$
$$+ \text{cos.}^3 P\ \text{ſin.}\,\lambda\ \text{cos.}^3\lambda - \text{cos.}^2 P\ \text{ſin.}\,\lambda\ \text{cos.}^3\lambda$$
$$+ \text{cos.}\,P\ \text{cos.}\,\lambda\ \text{ſin.}^3\lambda - \text{cos.}\,\lambda\ \text{ſin.}^3\lambda = 0$$

18. Æquatio tranſcendens adeo ſimplex, quae ſcilicet functionem complectitur duarum tantum quantitatum, in Problemate minime obvio & vulgari optari quidem, ſed ſperari nequaquam poterat. Hujus jam reſolutionem per falſas Poſitiones aggredior in anteceſſum animadvertens eſſe P $> 90°$, ideoque *cos.* P ſemper negativum.

Pono itaque primo arcum ſemidiurnum P $= 7.\ 56. = 119° = 2,077$; eſt autem TICINI $\lambda = 45°\ 11'$. En totius calculi typum.

$$P = 119° = 2,077$$
$$\lambda = 45°\ 11'$$

log. P	. . . . =	0, 3174116
log. ſin. P	. . . . =	9, 9418193
log. cos. P	. . . . =	9, 6855712
log. ſin. λ	. . . . =	9, 8508702
log. cos. λ	. . . . =	9, 8480909
*log. ſin.*³ λ	. . . . =	9, 5526106
*log. cos.*³ λ	. . . . =	9, 5442727
log. P *ſin.* P *cos.* λ *ſin.*³ λ	. . . . =	9, 6599324
P *ſin.* P *cos.* λ *ſin.*³ λ	. . . . . . =	0, 457
log. P *ſin.* P *cos.* P *ſin.* λ *cos.*³ λ	. . =	9, 3399450
P *ſin.* P *cos.* P *ſin.* λ *cos.*³ λ	. . . =	− 0, 2187
*log. cos.*³ P	. . . . =	9, 0567136

$\log. \cos.^3 P \sin.\lambda \cos.^2\lambda$ . . . . . . = 8, 4518567

$\cos.^3 P \sin.\lambda \cos.^2\lambda$ . . . . = − 0, 0283

$\log. \cos.^2 P$ . . . . = 9, 3711424

$\log. \cos.^2 P \sin.\lambda \cos.^2\lambda$ . . . . . = 8, 7662853

$-\cos.^2 P \sin.\lambda \cos.^2\lambda$ . . . . = − 0, 05838

$\log. \cos P \cos.\lambda \sin.^2\lambda$ . . . . . = 9, 0862727

$\cos. P \cos.\lambda \sin.^2\lambda$ . . . . . . = − 0, 1221

$\log. \cos.\lambda \sin.^2\lambda$ . . . . = 9, 4007015

$-\cos.\lambda \sin.^2\lambda$ . . . . = − 0, 2516

Fit igitur aequatio (*N*)
0, 457 − 0, 2187 − 0, 0283 − 0, 05838 − 0, 1221 − 0, 2516 = − 0, 22208; ubi erratur per defectum − 0, 22208.

19. Assumo secundo $P = 90° = 1, 571$; in qua assumptione fit $\sin. P = 1$, $\cos. P = 0$, & formula (*N*) evadit

$$P \cos.\lambda \sin.^2\lambda - \cos.\lambda \sin.^2\lambda = 0.$$

Nunc autem est

$\log. P$ . . . . = 0, 1961762

$\log. P \cos.\lambda \sin.^2\lambda$ . . . . . . = 9, 5968777

$P \cos.\lambda \sin.^2\lambda$ . . . . = 0, 3953

$-\cos.\lambda \sin.^2\lambda$ . . . . = − 0, 2516

Igitur formula (*N*) invenitur

0, 3953 − 0, 2516 = 0, 1437

Quamobrem ex prima Positione Error nascitur defectivus − 0, 22208, ex secunda excessivus + 0,1437, hoc est invenitur

Posit. I. $P = 119° = 2, 077$

Err. I. = − 0, 22208

Posit. II. $P = 90° = 1, 571$

Err. II. = + 0, 1437

Fiat modo uti Errorum summa ad Positionum differentiam, ita Error minimus ad quartum proportionalem, nimirum
0, 36578 : 29° : : 0, 1437 : 11, 39° = 11° 23′.

Quartus iste proportionalis 11° 23′ additus Positioni secundae 90° dat $P = 101° 23' = 1, 769$

20. Assumpto igitur tertio loco $P = 101° 23'$ = 1, 769 invenitur

$\log. P$ . . . . = 0, 2478311

$\log. \sin. P$ . . . . = 9, 9913717

$\log. \cos.\lambda \sin.^2\lambda$ . . . . = 9, 4007015

$\log. P \sin. P \cos.\lambda \sin.^2\lambda$ . . . . = 9, 6399043

$P \sin. P \cos.\lambda \sin.^2\lambda$ . . . . . = 0, 4364 *log. cos.* P . . . . = 9, 2876875

log. P *sin.* P *cos.* P *sin.* λ *cos.*³ λ . . = 8, 9220332

P *sin.* P *cos.* P *sin.* λ *cos.*³ λ . . . = − 0, 08357

*log. cos.*³ P . . . . = 7, 8630625

*log. cos.*³ P *sin.* λ *cos.*³ λ . . . . . = 7, 2582054

*cos.*³ *P sin.* λ *cos.*³ λ . . . . . . = − 0, 001812

*log. cos.*² P . . . . = 8, 5753750

*log. cos.*² P *sin.* λ *cos.*³ λ . . . . = 7, 9705179

— *cos.*² P *sin.* λ *cos.*³ λ . . . . . = − 0, 009344

log. cos. P *cos.* λ *sin.*³ λ . . . . . = 8, 6883890

cos. P *cos.* λ *sin.*³ λ . . . . = − 0, 0488

— *cos.* λ *sin.*³ λ . . . . = − 0, 2516

Hinc formula (*N*) convertitur in
0, 4364 — 0, 08357 — 0, 001812 — 0, 009344 — 0, 0488 — 0, 2516 = 0, 041274, prodeunte nimirum errore per excessum 0, 041274. Quare

Posit. II. P = 90° = 1, 571
Err. II. = + 0, 1437
Posit. III. P = 101° 23′ = 1, 769
Err. III. = + 0, 041274

Nunc autem propter Errorum similitudinem (nam

ambo sunt per excessum) analogia instituitur hoc pacto, uti Errorum differentia ad differentiam Positionum, ita Error minimus ad quartum, hoc est
0, 102426 : 683′ :: 0, 041274 : 275, 2′ = 4° 35′.

Addatur porro quartus nunc erutus 4° 35′ Positioni tertiae 101° 23′, ut fiat P = 105° 58′ = 1, 849.

21. Pergo iterum, & pono quarto loco

P = 105° 58′ = 1, 849

log. P . . . . = 0, 2670338

log. sin. P . . . . = 9, 9829140

log. cos. λ *sin.*³ λ . . . . = 9, 4007015

log. P *sin.* P *cos.* λ *sin.*³ λ . . . . . = 9, 6506493

P *sin.* P *cos.* λ *sin.*³ λ . . . . . . = 0, 4474

log. cos. P . . . . = 9, 4394560

log. sin. λ *cos.*³ λ . . . . = 9, 3951429

log. P *sin.* P *cos.* P *sin. cos.*³ λ . . = 9, 0845467

P *sin.* P *cos.* P *sin.* λ *cos.*³ λ . . . . = − 0, 1215

*log. cos.*³ P . . . . = 8, 3183680

*log. cos.*³ P *sin.* λ *cos.*³ λ . . . . . = 7, 7135109

*cos.*³ P *sin.* λ *cos.*³ λ . . . . = − 0, 00517

*log. cos.*² P . . . . = 8, 8789120

$\log.\ \cos^2 P\ \sin.\lambda\ \cos^3\lambda$ . . . . . $=$ 8, 2740549

$-\ \cos^2 P\ \sin.\lambda\ \cos^3\lambda$ . . . . . $= -$ 0, 0188

$\log.\ \cos.P\ \cos.\lambda\ \sin^3\lambda$ . . . . . $=$ 8, 8401575

$\cos.P\ \cos.\lambda\ \sin^3\lambda$ . . . . $= -$ 0, 06921

$-\ \cos.\lambda\ \sin^3\lambda$ . . . . $= -$ 0, 2516

Consequenter formula (N) abit in

0, 4474 — 0, 1215 — 0, 00517 — 0, 0188 — 0, 06921 — 0, 2516 $=$ — 0, 01888; erratur scilicet per defectum — 0, 01888. Quamobrem

Posit. III. P $=$ 101°. 23′ $=$ 1, 769

Err. III. $= +$ 0, 041274

Posit. IV. P $=$ 105°. 58′ $=$ 1, 849

Err. IV. $= -$ 0, 01888

Inveniatur, ut antea, quartus proportionalis post Errorum summam, Positionum differentiam, & Errorem minimum, hoc est fiat

0, 060154 : 275′ : : 0, 01888 : 8, 631′ $=$ 9′ circiter.

Tum quartus proportionalis modo inventus 9′ auferatur a Positione quarta, quo facto oritur P $=$ 105°. 49′ $=$ 1, 847.

22. Itaque pono demum quinto loco

P $=$ 105°. 49′ $=$ 1, 847

$\log.\ P$ . . . . $=$ 0, 2664186

$\log.\ \sin.P$ . . . . $=$ 9, 9832377

$\log.\ \cos.\lambda\ \sin^3\lambda$ . . . . $=$ 9, 4007015

$\log.P\ \sin.P\ \cos.\lambda\ \sin^3\lambda$ . . . . $=$ 9, 6503578

$P\ \sin.P\ \cos.\lambda\ \sin^3\lambda$ . . . . . . $=$ 0, 4470

$\log.\ \cos.P$ . . . . $=$ 9, 4354623

$\log.\ \sin.\lambda\ \cos^3\lambda$ . . . . $=$ 9, 3951429

$\log.P\ \sin.P\ \cos.P\ \sin.\lambda\ \cos^3\lambda$ . . $=$ 9, 0802615

$P\ \sin.P\ \cos.P\ \sin.\lambda\ \cos^3\lambda$ . . . $= -$ 0, 1203

$\log.\ \cos^3 P$ . . . . $=$ 8, 3063869

$\log.\ \cos^3 P\ \sin.\lambda\ \cos^3\lambda$ . . . . . $=$ 7, 7015298

$\cos^3 P\ \sin.\lambda\ \cos^3\lambda$ . . . . $= -$ 0, 00503

$\log.\ \cos^2 P$ . . . . $=$ 8, 8709246

$\log.\ \cos^2 P\ \sin.\lambda\ \cos^3\lambda$ . . . . . $=$ 8, 2660675

$-\ \cos^2 P\ \sin.\lambda\ \cos^3\lambda$ . . . . . $= -$ 0, 01845

$\log.\ \cos.P\ \cos.\lambda\ \sin^3\lambda$ . . . . . . $=$ 8, 8361638

$\cos.P\ \cos.\lambda\ \sin^3\lambda$ . . . . $= -$ 0, 06857

$-\ \cos.\lambda\ \sin^3\lambda$ . . . . $= -$ 0, 2516

Hinc formula (N) detegitur

0, 4470 — 0, 1203 — 0, 00503 — 0, 01845 — 0, 06857 — 0, 2516 = — 0, 01695. Iccirco habetur

$$\textit{Posit. IV.}\ P = 105^\circ\, 58' = 1,\ 849$$
$$\textit{Err. IV.} = -0,\ 041274$$
$$\textit{Posit. V.}\ P = 105^\circ\, 49' = 1,\ 847$$
$$\textit{Err. V.} = -0,\ 01695$$

Fiat iterum uti Errorum similium differentia ad differentiam Positionum, ita Error minimus ad quartum proportionalem, nimirum

$$0,\ 024324 : 9' :: 0,\ 01695 : 6,\ 286' = 6'.$$

Hoc dempto a Positione quinta resultat $P = 105^\circ\, 43' = 1,\ 845$.

23. Pono rursus sexto loco

$$P = 105^\circ\, 43' = 1,\ 845$$

$log. P$	= 0, 2660080
$log. sin. P$	= 9, 9834517
$log. cos. \lambda\ sin.^2 \lambda$	= 9, 4007015
$log. P\ sin. P\ cos. \lambda\ sin.^2 \lambda$	= 9, 6501612
$P\ sin. P\ cos. \lambda\ sin.^2 \lambda$	= 0, 4468
$log. cos. P$	= 9, 4327777
$log. sin. \lambda\ cos.^2 \lambda$	= 9, 3951429

$log. P\ sin. P\ cos. P\ sin. \lambda\ cos.^2 \lambda$ . .	= 9, 0773803
$P\ sin. P\ cos. P\ sin. \lambda\ cos.^2 \lambda$ . . .	= − 0, 1195
$log. cos.^3 P$	= 8, 2983331
$log. cos.^3 P\ sin. \lambda\ cos.^2 \lambda$	= 7, 6934760
$cos.^3 P\ sin. \lambda\ cos.^2 \lambda$	= − 0, 004937
$log. cos.^2 P$	= 8, 8655554
$log. cos.^2 P\ sin. \lambda\ cos.^2 \lambda$	= 8, 2606983
$-\ cos.^2 P\ sin. \lambda\ cos.^2 \lambda$	= − 0, 01823
$log. cos. P\ cos. \lambda\ sin.^2 \lambda$	= 8, 8334792
$cos. P\ cos. \lambda\ sin.^2 \lambda$	= − 0, 06815
$-\ cos. \lambda\ sin.^2 \lambda$	= − 0, 2516

Hinc formula (N) invenitur

0, 4468 — 0, 1195 — 0, 004937 — 0, 01823 — 0, 06815 — 0, 2516 = — 0, 015617. Iccirco habetur

$$\textit{Posit. V.}\ P = 105^\circ\, 49' = 1,\ 847$$
$$\textit{Err. V.} = -0,\ 01695$$
$$\textit{Posit. VI.}\ P = 105^\circ\, 43' = 1,\ 845$$
$$\textit{Err. VI.} = -0,\ 015617$$

Fiat rursus uti Errorum similium differentia ad differentiam Positionum, ita Error minimus ad quartum hoc est

$$0,\ 001333 : 6' :: 0,\ 015617 : 70,\ 29' = 1^\circ\, 10'.$$

Quartus proportionalis 1.° 10′ ablatus a Poſitione ſexta 105.° 43′ praebet P = 104.° 33′ = 1, 825.

24. Pono igitur ſeptimo loco

$$P = 104.^\circ\ 33' = 1,\ 825$$

log. P	=	0, 2611886
log. ſin. P	=	9, 9858434
log. cos. P	=	9, 4000625
*log. cos.*² P	=	8, 8001250
*log. cos.*³ P	=	8, 2001876
log. cos. λ *ſin.*² λ	=	9, 4007015
log. ſin. λ *cos.*² λ	=	9, 3951429
log. P *ſin.* P *cos* λ *ſin.*² λ	=	9, 6477335
P *ſin.* P *cos.* λ *ſin.*² λ	=	0, 4444
log. P *ſin.* P *cos.* P *ſin.* λ *cos.*² λ	=	9, 0422374
P *ſin.* P *cos.* P *ſin.* λ *cos.*² λ	=	− 0, 1102
*log. cos.*³ P *ſin.* λ *cos.*² λ	=	7, 5953304
*cos.*³ P *ſin.* λ *cos.*² λ	=	− 0, 003938
*log. cos.*² P *ſin.* λ *cos.*² λ	=	8, 1952679
— *cos.*² P *ſin.* λ *cos.*² λ	=	− 0, 01568
log. cos. P *cos.* λ *ſin.*² λ	=	8, 8007640

cos. P *cos.* λ *ſin.*² λ	=	− 0, 06321
— *cos.* λ *ſin.*² λ	=	− 0, 2516

Quapropter aequatio (*N*) fit

0, 4444 — 0, 1102 — 0, 003938 — 0, 01568 — 0, 06321 — 0, 2516 = — 0, 0002. Eſt igitur

Poſit. VI. P = 105.° 43′ = 1, 845

Err. VI. = — 0, 015617

Poſit. VII. P = 104.° 33′ = 1, 825

Err. VII. = — 0, 0002

Inſtituatur rurſus analogia, uti Errorum differentia ad differentiam Poſitionum, ita Error minimus ad quartum, videlicet 0, 0154: 70′ : : 0, 0002 : 0, 9092′ = 54″. Auferatur jam a Poſitione ſeptima 104.° 33′ quartus modo inventus 54″, & orietur tandem aequationis (*N*) radix vero maxime appropinquans P = 104.° 32′. 6″.

25 Igitur invenimus demum arcum ſemidiurnum calori aeſtivo vehementiſſimo reſpondentem, qui porro arcus ſi convertatur in tempus praebet $6^h\ 58^m$, nimirum horas ſex, & minuta quinquaginta octo. Invento autem arcu ſemidiurno facile erit declinationem Solis, proindeque & diem quaeſitam detegere. Enimvero nacti antea ſumus aequalitatem

$$sin.\,\delta = \frac{cos.\,\lambda\; cos.\,P}{\sqrt{(sin.^2\lambda + cos.^2\lambda\; cos.^2 P)}}$$. Propterea

subducto calculo fiet

$$P = 104^{\circ}\ 32'$$

$log.\ cos.\,\lambda$	. . . . $=$	9, 8480909
$log.\ cos.\,P$	. . . . $=$	9, 3995754
$log.\ cos.\,\lambda\ cos.\,P$	. . . . $=$	9, 2476663
$log.\ sin.\,\lambda$	. . . . $=$	9, 8508702
$log.\ sin.^2\lambda$	. . . . $=$	9, 7017404
$sin.^2\lambda$	. . . . $=$	0, 5032
$log.\ cos.^2\lambda$	. . . . $=$	9, 6961818
$log.\ cos.^2 P$	. . . . $=$	8, 7991508
$log.\ cos.^2\lambda\ cos.^2 P$	. . . . $=$	8, 4953326
$cos.^2\lambda\ cos.^2 P$	. . . . $=$	0, 03128
$sin.^2\lambda + cos.^2\lambda\ cos.^2 P$	. . . . . $=$	0, 53448
$log.(sin.^2\lambda + cos.^2\lambda\ cos.^2 P)$	. . $=$	9, 7279315
$log.\sqrt{(sin.^2\lambda + cos.^2\lambda\ cos.^2 P)}$	. $=$	9, 8639657
$log.\dfrac{cos.\,\lambda\ cos.\,P}{\sqrt{(sin.^2\lambda + cos.^2\lambda\, cos.^2 P)}} = log.\,sin.\,\delta$	$=$	9, 3837006

Hinc eruitur $\delta = 14^{\circ}$, quod incidit in diem $14.^{um}$ & $15.^{um}$ mensis augusti. Is itaque dies prae aestivis omnibus Maximo Caloris gradu infamis erit. Hoc vero si cum Physicorum observationibus calorem maximum in nostro climate circiter finem Julii, & initium Augusti indicantibus non quadrat ad amussim, tam parum tamen ab illis discordat, ut in quaestione tam lubrica tantisque impedita difficultatibus majorem consensum nemo postulaverit nisi totius rei physicae, & mathematicae rudis.

26. Experiamur nunc strictim cursimque, quid in aestimatione Caloris Annui Maximi obveniat, si loco arcus semidiurni simplicis adhibeatur quadratum illius, ut non paucis Physicis placet. In hac itaque hypothesi rationes repetens §. 16. subductas invenio calorem diei cujusvis aestivi ab expressione

$$\frac{P^2\ sin.\,\lambda\ \ cos.\,\lambda\ (cos.\,P - 1)}{\sqrt{(sin.^2\lambda + cos.^2\lambda\ cos.^2 P)}}$$ repraesentatum. In

hac expressione variat sola quantitas P, estque ea aestatis tempore semper major arcu quadrantali, indeque negativus est *cos.* P, & vicissim affirmativum differentiale ejusdem. Quamobrem si hac circumspectione accipiatur caloris modo inventi differentiale, illudque nihilo aequetur, per idonea calculi compendia ad sequentem demum pervenimus aequationem

$$P^2\,\mathit{sin.}\,P\,\mathit{cos.}\,\lambda\,\mathit{sin.}^3\lambda + P^2\,\mathit{sin.}\,P\,\mathit{cos.}\,P\,\mathit{sin.}\,\lambda\,\mathit{cos.}^2\lambda$$
$$+\,2P\,\mathit{cos.}\,P\,\mathit{cos.}\,\lambda\,\mathit{sin.}^3\lambda + 2P\,\mathit{cos.}^2P\,\mathit{sin.}\,\lambda\,\mathit{cos.}^3\lambda$$
$$-\,2P\,\mathit{cos.}^2P\,\mathit{sin.}\,\lambda\,\mathit{cos.}^3\lambda - 2P\,\mathit{cos.}\,\lambda\,\mathit{sin.}^3\lambda = 0.$$

27. Capto, ut ante, $\lambda = 45^\circ\,11'$, fiat $P = 110^\circ = 1,9199$; videamusque quemnam valorem ex hisce assumptionibus superior aequatio nanciscatur. Igitur

$$P = 110^\circ = 1,9199$$
$$\lambda = 45^\circ\,11'$$

log. P	. . . . =	0, 2832786
log. P^2	. . . . =	0, 5665572
log. $\mathit{sin.}P$	. . . . =	9, 9729858
log. $\mathit{cos.}\lambda\,\mathit{sin.}^3\lambda$	. . . . =	9, 4007015
log. $P^2\,\mathit{sin.}P\,\mathit{cos.}\lambda\,\mathit{sin.}^3\lambda$	. . . . =	9, 9402445
$P^2\,\mathit{sin.}P\,\mathit{cos.}\lambda\,\mathit{sin.}^3\lambda$	. . . . . . =	0, 8715
log. $\mathit{cos.}P$	. . . . =	9, 5340517
log. $P^2\,\mathit{sin.}P\,\mathit{cos.}P$	. . . . . =	0, 0735947
log. $\mathit{sin.}\lambda\,\mathit{cos.}^3\lambda$	. . . . =	9, 3951429
log. $P^2\,\mathit{sin.}P\,\mathit{cos.}P\,\mathit{sin.}\lambda\,\mathit{cos.}^3\lambda$	. . =	9, 4687376
$P^2\,\mathit{sin.}P\,\mathit{cos.}P\,\mathit{sin.}\lambda\,\mathit{cos.}^3\lambda$	. . . =	− 0, 2943
log. 2	. . . . =	0, 3010300

log. P	. . . . =	0, 2832786
log. $\mathit{cos.}P$	. . . . =	9, 5340517
log. $\mathit{cos.}\lambda\,\mathit{sin.}^3\lambda$	. . . . =	9, 4007015
log. $2P\,\mathit{cos.}P\,\mathit{cos.}\lambda\,\mathit{sin.}^3\lambda$	. . . . =	9, 5190618
$2P\,\mathit{cos.}P\,\mathit{cos.}\lambda\,\mathit{sin.}^3\lambda$	. . . . . . =	− 0, 3304
log. $2P$	. . . . =	6, 5843086
log. $\mathit{cos.}^3P$	. . . . =	8, 6021551
log. $\mathit{sin.}\lambda\,\mathit{cos.}^3\lambda$	. . . . =	9, 3951429
log. $2P\,\mathit{cos.}^3P\,\mathit{sin.}\lambda\,\mathit{cos.}^3\lambda$	. . . . =	8, 5816066
$2P\,\mathit{cos.}^3P\,\mathit{sin.}\lambda\,\mathit{cos.}^3\lambda$	. . . . . =	− 0, 0382
log. $2P$	. . . . =	0, 5843086
log. $\mathit{cos.}^2P$	. . . . =	9, 0681034
log. $\mathit{sin.}\lambda\,\mathit{cos.}^3\lambda$	. . . . =	9, 3951429
log. $2P\,\mathit{cos.}^2P\,\mathit{sin.}\lambda\,\mathit{cos.}^3\lambda$	. . . =	9, 0475549
$-\,2P\,\mathit{cos.}^2P\,\mathit{sin.}\lambda\,\mathit{cos.}^3\lambda$	. . . =	− 0, 1116
log. $2P$	. . . . =	0, 5843086
log. $\mathit{cos.}\lambda\,\mathit{sin.}^3\lambda$	. . . . =	9, 4007015
log. $2P\,\mathit{cos.}\lambda\,\mathit{sin.}^3\lambda$	. . . . . . =	9, 9850101
$-\,2P\,\mathit{cos.}\lambda\,\mathit{sin.}^3\lambda$	. . . . . . =	− 0, 9661

Quamobrem ſuperior aequatio abit in 0,8715 — 0,2943 — 0,3304 — 0,0382 — 0,1116 — 0,9661 = — 0,8691. Hinc erratur per defectum quantitate — 0, 8691.

28. Sumo ſecundo loco

$$P = 105^\circ = 1,\ 8326$$

$$\lambda = 45^\circ\ 11'$$

log. P	=	0, 2630677
log. P^2	=	0, 5261354
log. ſin. P	=	9, 9849438
log. cos. λ *ſin.*^{2} λ	=	9, 4007015
log. P^2 *ſin.* P *cos.* λ *ſin.*^{2} λ	=	9, 9117807
P^2 *ſin.* P *cos.* λ *ſin.*^{2} λ	=	0, 8162
log. P^2 *ſin.* P	=	0, 5110792
log. cos. P	=	9, 4129962
log. ſin. λ *cos.*^{2} λ	=	9, 3951429
log. P^2 *ſin.* P *cos.* P *ſin.* λ *cos.*^{2} λ	=	9, 3192183
P^2 *ſin.* P *cos.* P *ſin.* λ *cos.*^{2} λ	=	− 0, 2085
log. 2	=	0, 3010300
log. P	=	0, 2630677
log. cos. P	=	9, 4129962

log. cos. λ *ſin.*^{2} λ	=	9, 4007015
log. 2 P *cos.* P *cos.* λ *ſin.*^{2} λ	=	9, 3777954
2 P *cos.* P *cos.* λ *ſin.*^{2} λ	=	− 0, 2387
log. 2 P	=	0, 5640977
log. cos.^{2} P	=	8, 2389886
log. ſin. λ *cos.*^{2} λ	=	9, 3951429
log. 2 P *cos.*^{2} P *ſin.* λ *cos.*^{2} λ	=	8, 1982292
2 P *cos.*^{2} P *ſin.* λ *cos.*^{2} λ	=	− 0, 0158
log. 2 P	=	0, 5640977
log. cos.^{2} P	=	8, 8259924
log. ſin. λ *cos.*^{2} λ	=	9, 3951429
log. 2 P *cos.*^{2} P *ſin.* λ *cos.*^{2} λ	=	8, 7852330
— 2 P *cos.*^{2} P *ſin.* λ *cos.*^{2} λ	=	− 0, 0610
log. 2 P	=	0, 5640977
log. cos. λ *ſin.*^{2} λ	=	9, 4007015
log. 2 P *cos.* λ *ſin.*^{2} λ	=	9, 9647992
— 2 P *cos.* λ *ſin.*^{2} λ	=	− 0, 9221

Hinc praecedens aequatio ſequentem nanciſcitur valorem 0, 8162 — 0, 2085 — 0, 2387 — 0, 0158

— 0, 0610 — 0, 9221 = — 0, 6299, hoc est peccat iterum defectu.

29. Accipiatur nunc arcus semidiurnus ipsius diei solstitialis aestivi, quando scilicet $\delta = 23^\circ\ 28'$. Id assequemur per formulam §. 25. $sin.\ \delta = \frac{cos.\ \lambda\ cos.\ P}{\sqrt{(sin.^2\lambda + cos.^2\lambda\ cos.^2 P)}}$, ex qua opportunis peractis reductionibus eruitur $cos.\ P = tang.\ \delta\ tang.\ \lambda$. Igitur

$log.\ tang.\ \delta$	. . . . =	9, 6376106
$log.\ tang.\ \lambda = log.\ tang.\ 45^\circ\ 11'$	. =	10, 0027793
$log.\ tang.\ \delta\ tang.\ \lambda$	. . . . =	9, 6403899

Quare si P esset quadrante minor prodiret $cos.\ P = cos.\ 64^\circ\ 6'$; quum autem, ut alias constat, sit P quadrante major sit ideo $cos.\ P = cos.\ (180^\circ - 64^\circ\ 6') = cos.\ 115^\circ\ 54'$, seu $P = 115^\circ\ 54'$. Ponatur itaque tertio loco

$$P = 115^\circ\ 54' = 2,\ 0228$$
$$\lambda = 45^\circ\ 11'$$

$log.\ P$	. . . . =	0, 3059529
$log.\ P^2$	. . . . =	0, 6119058
$log.\ sin.\ P$	. . . . =	9, 9540291
$log.\ cos.\ \lambda\ sin.^2\lambda$	. . . . =	9, 4007015

$log.\ P^2\ sin.\ P\ cos.\ \lambda\ sin.^2\lambda$	. . . =	0, 2725893
$P^2\ sin.\ P\ cos.\ \lambda\ sin.^2\lambda$	. . . . . . =	1, 8732
$log.\ cos.\ P$	. . . . =	9, 6402844
$log.\ P^2\ sin.\ P$	. . . . =	0, 5659349
$log.\ sin.\ \lambda\ cos.^2\lambda$	. . . . =	9, 3951429
$log.\ P^2\ sin.\ P\ cos.\ P\ sin.\ \lambda\ cos.^2\lambda$	. =	9, 6013622
$P^2\ sin.\ P\ cos.\ P\ sin.\ \lambda\ cos.^2\lambda$	. . . =	- 0, 3994
$log.\ 2$	. . . . =	0, 3010300
$log.\ P$	. . . . =	0, 3059529
$log.\ cos.\ P$	. . . . =	9, 6402844
$log.\ cos.\ \lambda\ sin.^2\lambda$	. . . . =	9, 4007015
$log.\ 2P\ cos.\ P\ cos.\ \lambda\ sin.^2\lambda$	. . . =	9, 6479688
$2P\ cos.\ P\ cos.\ \lambda\ sin.^2\lambda$	. . . . =	- 0, 4446
$log.\ 2P$	. . . . =	0, 6069829
$log.\ cos.^2 P$	. . . . =	8, 9208632
$log.\ sin.\ \lambda\ cos.^2\lambda$	. . . . =	9, 3951429
$log.\ 2P\ cos.^2 P\ sin.\ \lambda\ cos.^2\lambda$	. . . =	8, 9229790
$2P\ cos.^2 P\ sin.\ \lambda\ cos.^2\lambda$	. . . . =	- 0, 0837
$log.\ 2P$	. . . . =	0, 6069829

log. cos.^{2} P	$=$ 9, 2805688
log. sin. λ *cos.*^{3} λ	$=$ 9, 3951429
log. 2 P *cos.*^{2} P *sin.* λ *cos.*^{3} λ . . .	$=$ 9, 2826946
— 2 P *cos.*^{2} P *sin.* λ *cos.*^{3} λ . . .	$=$ − 0, 1917
log. 2 P	$=$ 0, 6069829
log. cos. λ *sin.*^{3} λ	$=$ 9, 4007015
log. 2 P *cos.* λ *sin.*^{3} λ	$=$ 0, 0076844
— 2 P *cos.* λ *sin.*^{3} λ	$=$ − 1, 1018

Propterea superior aequatio hanc induit formam 1, 8732 — 0, 3994 — 0, 4446 — 0, 0837 — 0, 1917 — 0, 1018 $=$ — 0, 3480, aberrat scilicet a nihilo per defectum — 0, 3480.

30. Adhibeatur postremo P $= 90°$; tuncque ob *cos.* P $= 0$, *sin.* P $= 1$ aequatio praecedens ad duos tantum terminos contrahitur P^2 *cos.* λ *sin.*^{3} λ — 2 P *cos.* λ *sin.*^{3} λ $= 0$. Est igitur

$$P = 90° = 1,\ 5708$$

$$\lambda = 45°.\ 11'$$

log. P	$=$ 0, 1961209

log. P^2	$=$ 0, 3922418
log. cos. λ *sin.*^{3} λ	$=$ 9, 4007015
log. P^2 *cos.* λ *sin.*^{3} λ	$=$ 9, 7929433
P^2 *cos.* λ *sin.*^{3} λ	$=$ 0, 6208
log. 2	$=$ 0, 3010300
log. P	$=$ 0, 1961209
log. cos. λ *sin.*^{3} λ	$=$ 9, 4007015
log. 2 P *cos.* λ *sin.*^{3} λ	$=$ 9, 8978524
— 2 P *cos.* λ *sin.*^{3} λ	$=$ − 0, 7904

Itaque suscipit aequatio formam 0, 6208 — 0, 7904 $=$ — 0, 1696, seu tantundem aberrat a genuino valore, nimirum a nihilo.

31. Ex dictis sequens habetur assumptionum, errorumque conspectus:

Arcus Semidiurni	Errores
115°. 54'	— 0, 3480
110°.	— 0, 8691
105°.	— 0, 6299
90°.	— 0, 1696

quem qui paullo attentius examinaverit, Errorumque indolem, menſuram, progreſſum, atque illorum cum Aſſumptionibus reſpondentibus relationes rite perpenderit, is apodictice invicteque colliget, Calorem Maximum, quem hic unice ſpectamus, in nullum incidere poſſe tempus, quod cum Phyſicorum obſervationibus vel aliquantulum conſpiret, & conſequenter hypotheſim de quadrato arcus ſemidiurni ante dictam excuſſis cardinibus convulſiſque fundamentis corruere.

Tab. I.

Fig. 1.

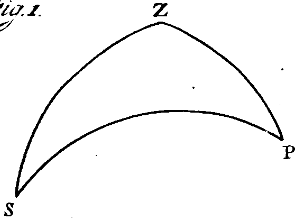


Fig. 2.

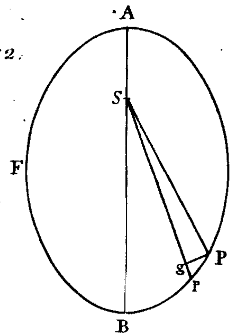


Fig. 3.

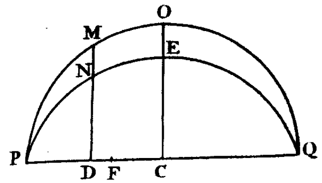


Fig. 4.

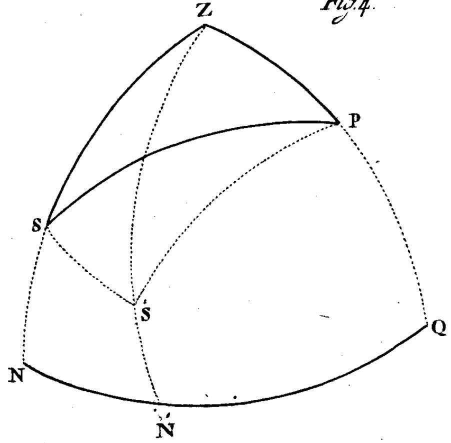
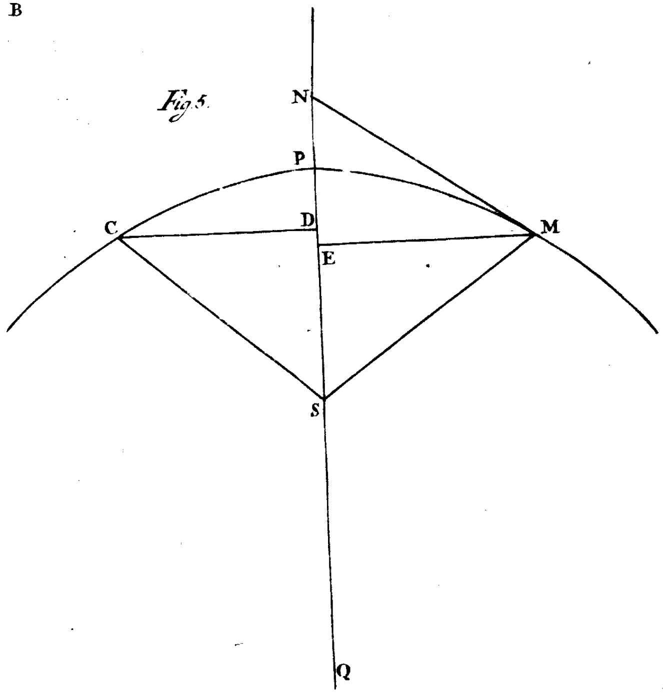


Fig. 5.



Tab. II.

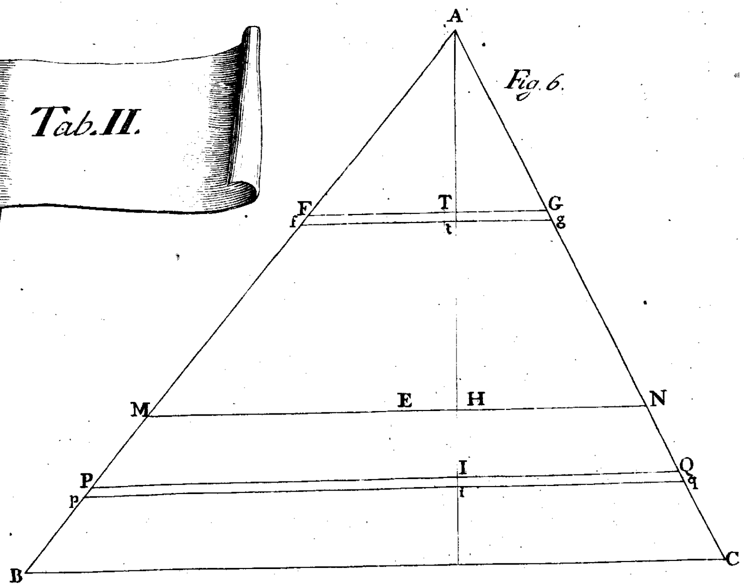


Fig. 6.

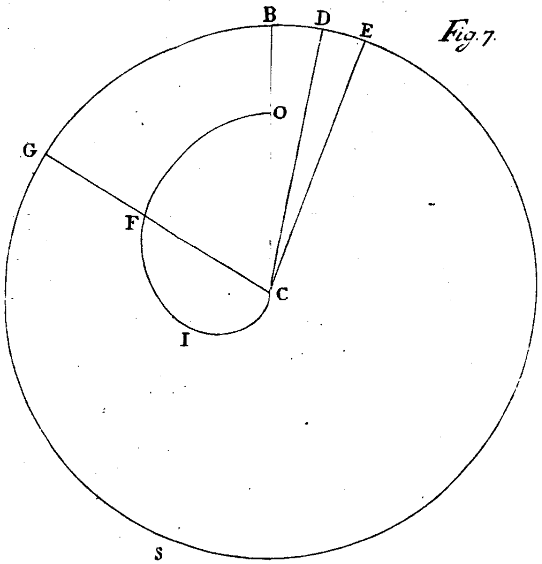


Fig. 7.

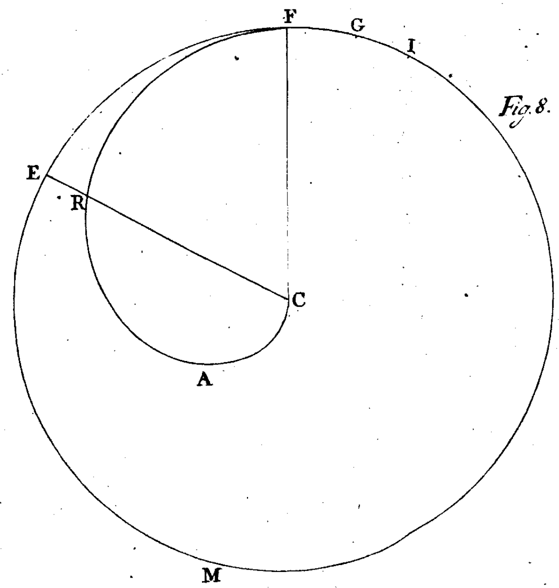


Fig. 8.

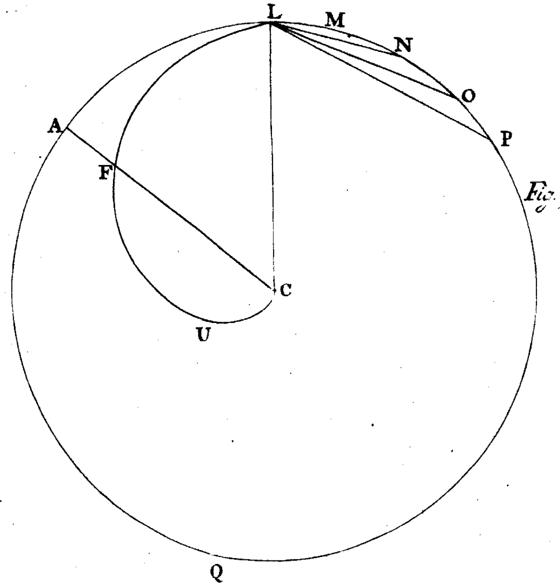


Fig. 9.

Tab. III.

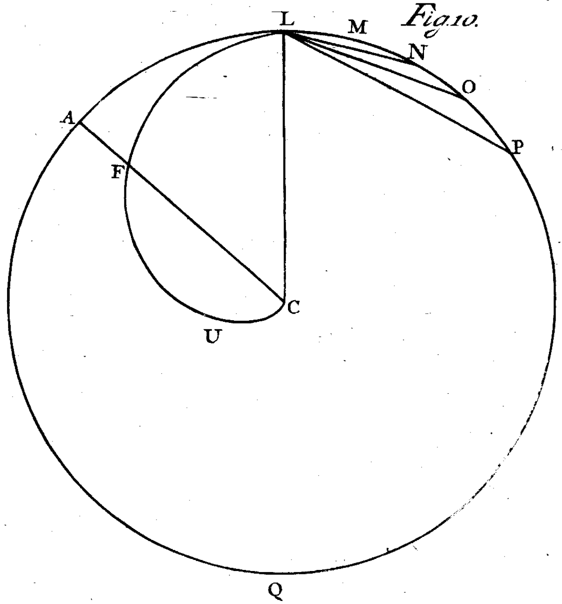


Fig. 10.

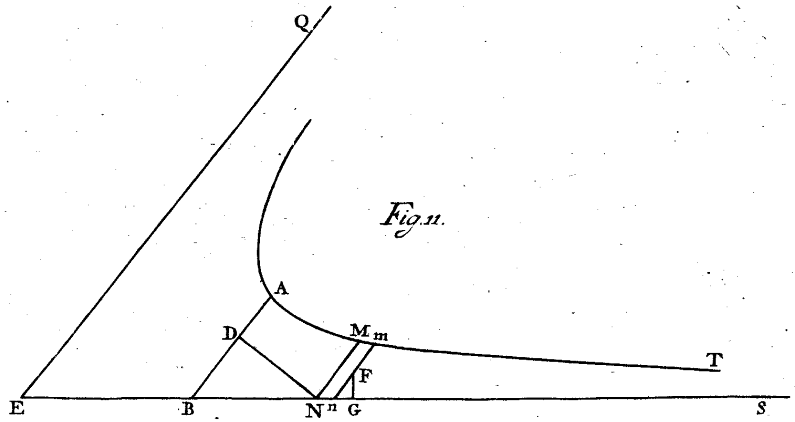


Fig. 11.

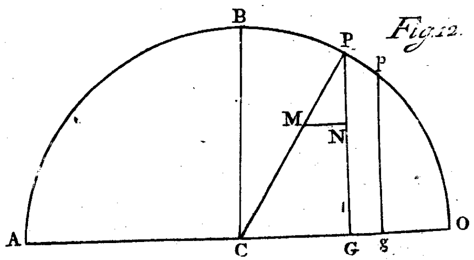


Fig. 12.

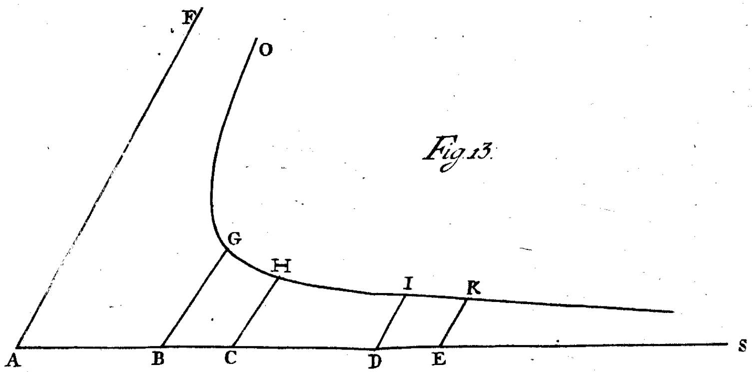


Fig. 13.